<u>Es.</u>: Dim. che $sl(n+1)$ $(n \geq 1)$, $so(2n+1)$ $(n \geq 1)$, $sp(2n)$ $(n \geq 1)$, $so(2n)$ $(n \geq 3)$ sono semplici, e che hanno sist. di radici rispettivam. A_n, B_n, C_n, D_n.

<u>Svolgim.</u>: Si applica l'ultima prop. del corso: abbiamo già visto H, Φ, Δ, mancano da trovare gli elem. h_i.

In $sl(n+1)$: $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1(h_1) = 2,\ \alpha_2(h_1) = -1,\ \alpha_3(h_1) = 0$ ...ecc.

Analogam. $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ eccetera.

<u>Esercizio</u>: trovare gli elem. h_i per so e sp.

<u>Es.</u>: (radice più alta) Def. $\alpha > \beta$ se $\alpha - \beta \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Delta$.

Sia θ massimale, cioè $\theta \not< \beta$ $\forall \beta \in \Phi$, e sia Φ <u>irriducibile</u>.

1) $(\theta, \alpha) \geq 0$ $\forall \alpha \in \Phi^+$.

<u>Dim.</u>: Se $(\theta, \alpha) < 0$ allora $\theta + \alpha \in \Phi^+$ e $\theta + \alpha > \theta$, assurdo.

2) $\theta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, $c_\alpha > 0$ $\forall \alpha$

<u>Dim.</u>: Supp. $c_\beta = 0$ per una $\beta \in \Delta$, e supp. $\exists \gamma \in \Delta \,/\, (\beta, \gamma) < 0$ (cioè c'è un lato fra β e γ), con $c_\gamma > 0$ (esistono β, γ altrim. $\{\beta \mid c_\beta = 0\} \perp \{\gamma \mid c_\gamma > 0\}$)

$$(\theta, \beta) = \Big(\sum_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}} c_\beta \beta, \beta\Big) = \overset{>0}{c_\gamma} \overset{<0}{(\gamma, \beta)} + \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \{\gamma, \beta\}} \overset{\geq 0}{c_\alpha} \overset{\leq 0}{(\alpha, \beta)} < 0$$

<u>assurdo</u>

3) ϑ è unica

Dim.: $\vartheta' =$ massimale $\neq \vartheta$, anche i coeff. di ϑ' sono ≥ 0, c'è $\alpha \in \Delta \mid (\alpha, \vartheta) > 0$, allora $(\vartheta', \vartheta) = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \underbrace{(\beta, \vartheta)}_{\geq 0} > 0$

e allora $\vartheta - \vartheta'$ opp. $\vartheta' - \vartheta \in \Phi^+$, cioè $\vartheta > \vartheta'$ opp. $\vartheta' > \vartheta$. $\quad \vartheta \geq 0$, > 0 per α.

4) $\vartheta > \alpha \quad \forall \alpha \in \Phi^+ \setminus \{\vartheta\}$

Dim.: $\alpha <$ una massimale $\Rightarrow \alpha < \vartheta$.

5) ϑ è lunga almeno quanto una radice in $\overline{C}$ (quindi ϑ è lunga).

qualsiasi

Dim.: prendo $\alpha \in \overline{C}$, allora $\vartheta > \alpha$, quindi

$$(\vartheta, \vartheta - \alpha) \geq 0, \quad (\alpha, \vartheta - \alpha) \geq 0$$

$\uparrow$ per 1) $\qquad \uparrow$ perché $\alpha \in \overline{C}$

cioè $(\vartheta, \vartheta) \geq (\vartheta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$

Es.: Dim. che $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \_ + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n = \gamma$ è una radice di C_n, $n \geq 3$ $(\Delta = \{\alpha_1, \_, \alpha_n\})$ e stabilire se è lunga o corta.

$1 \quad 2 \quad \dots \quad n-2 \quad n-1 \quad n$

Dim.: Cerchiamo $w \in W$ tale che $w(\gamma) \in \Delta$

$$s_1(\gamma) = -\alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_1) + 2\alpha_3 + \dots = \gamma$$

$$s_2(\gamma) = \alpha_1 + \alpha_2 - \cancel{2\alpha_2} + 2(\alpha_3 + \cancel{\alpha_2}) + \_ =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \_ \qquad \text{funziona fino a } s_{n-2}$$

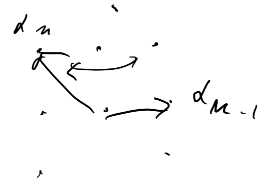
$$\dots \; s_{n-2}(\alpha_1 + \_ + \alpha_{n-3} + 2\alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n) =$$

$$(s_{n-2}(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) = \alpha_{n-1})$$

$= \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n = \varepsilon$

lunga

$\langle \alpha_n, \alpha_{n-1}^\vee \rangle = -2$

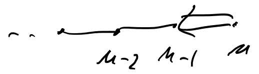


$s_{n-1}(\varepsilon) = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} - \cancel{2\alpha_{n-1}} + \underbrace{s_{n-1}(\alpha_n)}_{\alpha_n + \cancel{2\alpha_{n-1}}} =$

$= \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

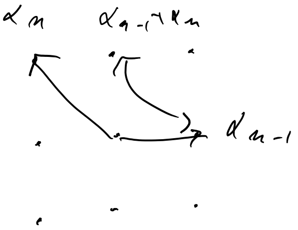
$s_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

funziona fino a



$\vdots$

$s_{n-2}(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n) = \alpha_{n-1} + \alpha_n$



$s_n(\alpha_{n-1} + \alpha_n) = \alpha_{n-1} + \alpha_n - \alpha_n$

$= \alpha_{n-1}$

Quindi γ è radice corta. Un elem. che la manda a una rad. semplice è

$w = s_n s_{n-2} \cdots s_2 s_1 s_{n-1} \cdots s_3 s_2$

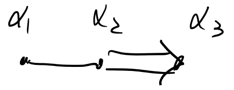
Questo procedim. è <u>generale</u>!

<u>Es.:</u> Sia $\beta \in \Phi^+ \setminus \Delta$ esiste $\alpha \in \Delta$ tale che $\beta - \alpha \in \Phi^+$.
In tal caso α compariva già nell'espr. di $\beta \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Delta$.

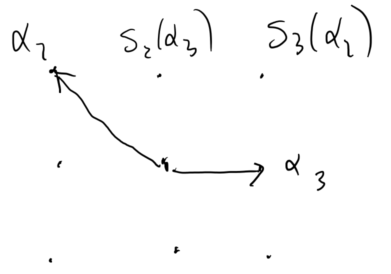
<u>Dim.:</u> Se $(\beta, \alpha) > 0$ per un $\alpha \in \Delta$, allora $\beta - \alpha, \alpha - \beta \in \Phi$.
Chiaram. $\beta - \alpha$ è positiva.
Supp. per assurdo $(\beta, \alpha) \leq 0 \ \forall \alpha \in \Delta$.
Allora $(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} \overset{\geq 0}{c_\alpha} \underset{\leq 0}{(\beta, \alpha)} \leq 0$ <u>assurdo</u>.

Es.: Trovare radici di Φ di tipo B_3.

Svolgim.:



$\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle = -1$ $\qquad$ $\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -1$



$\langle \alpha_1, \alpha_3^\vee \rangle = 0$ $\qquad$ $\langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 0$

$\langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle = -2$ $\qquad$ $\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -1$

lunga $\quad$ corta $\qquad\qquad$ corta $\quad$ lunga

$s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ $\qquad$ $s_1(\alpha_3) = \alpha_3$

$s_2(\alpha_1) = -1$— $\qquad$ $s_2(\alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3$

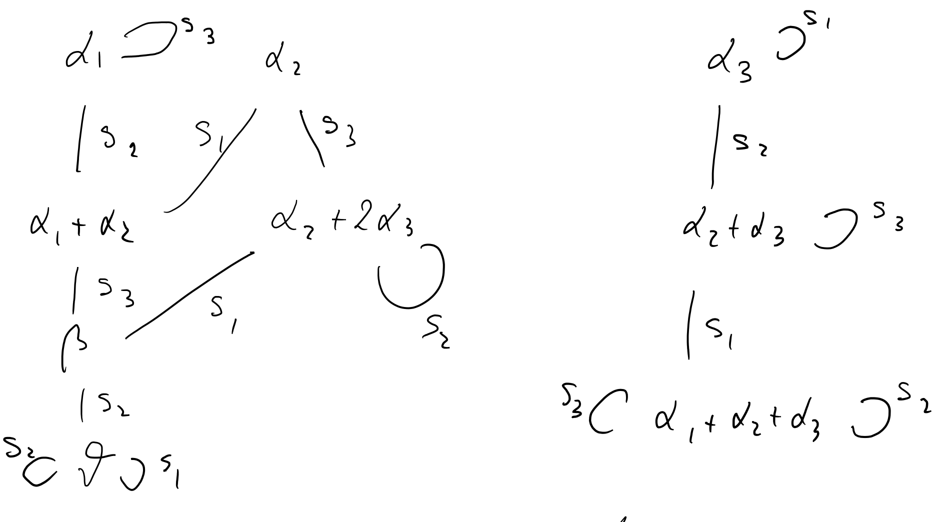
$s_3(\alpha_1) = \alpha_1$ $\qquad$ $s_3(\alpha_2) = \alpha_2 + 2\alpha_3$

$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2$ $\qquad$ $s_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + s_3(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = \beta$

$s_1(\beta) = \alpha_2 + 2\alpha_3$ $\qquad$ $s_2(\beta) = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3) = \vartheta$

$s_1(\gamma) = -\alpha_1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_3 = \vartheta$

$s_3(\gamma) = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + 2\alpha_3) - 2\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = \vartheta$



Queste sono tutte le positive, le negative sono i loro opposti.