Token: 236120

Omomorfismi di gruppi di matrici

<u>Proposizione</u>: Sia $G \leq GL(n, \mathbb{R})$ e $H \leq GL(m, \mathbb{R})$ sgr chiusi,

e sia $\varphi : G \to H$ omomorfismo di gruppi, <u>continuo</u>.

Esiste un unico omom. di algebre di Lie

$d\varphi : Lie(G) \to Lie(H)$ chiamato il differenziale di φ,

tale che $\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)} \quad \forall X \in Lie(G)$.

<u>Dim.</u>: Dato $X \in Lie(G)$ consid. $t \mapsto \varphi(e^{tX})$, $\mathbb{R} \to H$.

E' un omomorfismo continuo ($\mathbb{R}$ con la somma), quindi è

della forma $t \mapsto \underbrace{e^{tY} (= \varphi(e^{tX}))}$ per un elem. $Y \in Lie(H)$,

e Y è univocam. determinato.

Poniamo $d\varphi(X) = Y$, e dimostriamo che $d\varphi$ così def. è lineare e rispetta il bracket, cioè è omom. di algebre di Lie. L'unicità sarà chiara da $e^{tY} = \varphi(e^{tX})$.

Che $d\varphi$ sia compatibile con la moltipl. per scalari in $\mathbb{R}$ segue dalla definizione.

Siano $X_1, X_2 \in Lie(G)$:

$$\varphi\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = \varphi\left(e^{tX_1 + tX_2}\right) = \lim_{k \to +\infty} \varphi\left(e^{\frac{t}{k}X_1} e^{\frac{t}{k}X_2}\right)^k =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\varphi\left(e^{\frac{t}{k}X_1}\right) \cdot \varphi\left(e^{\frac{t}{k}X_2}\right)\right)^k =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(e^{\frac{t}{k} d\varphi(X_1)} e^{\frac{t}{k} d\varphi(X_2)} \right)^k = e^{t(d\varphi(X_1) + d\varphi(X_2))}$$

da cui $d\varphi(X_1 + X_2) = d\varphi(X_1) + d\varphi(X_2)$.

Rimane da dimostrare che $d\varphi([X_1, X_2]) = [d\varphi(X_1), d\varphi(X_2)]$, e si usa la formula simile già vista per $e^{[X_1, X_2]}$: esercizio. $\square$

Corollario: Siano G, H, φ come nella prop.. Allora φ è C^∞.

Dim.: Sappiamo $\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}$, allora per $\|A - I_n\|$ abb. piccolo abbiamo

$$\varphi(A) = e^{d\varphi(\log(A))}$$

il che esprime φ come appl. C^∞ in un intorno di $I_n \in G$.

Inoltre sia $B \in G$ qualsiasi:

$$\varphi(\underset{\substack{\text{variabile}\\ \text{in un intorno}\\ \text{di } I_n}}{A} \cdot \underset{\text{fissata}}{B}) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

Sia allora C con $\|C - B\|$ abb. piccolo, tale che $C = A \cdot B$ con A abb. vicina a I_n, allora

$$\varphi(C) = \varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(C B^{-1}) \cdot \varphi(B)$$

esprime φ come funzione C^∞ in un intorno di B. $\square$

Oss.: Sapendo ora che φ è C^∞, $d\varphi$ coincide proprio col differenziale usuale di φ in $I_n \in G$, perché quest'ultimo si può calcolare prendendo una curva α in G con un certo vettore velocità in I_n, e vedendo che vettore velocità ha $\varphi \circ \alpha$. Prendendo $\alpha(t) = e^{tX}$ con $X \in Lie(G)$ si conclude che questo è proprio il nostro $d\varphi$.

Rappresentazioni di gruppi e algebre di Lie

Def.: 1) Sia G un gruppo (non nec. di matrici, né topologico), e sia k un campo. Una rappresentazione di G (su k) è un omomorfismo di gruppi $G \longrightarrow GL(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su k.

2) Data un'algebra di Lie L su k, una rappresentazione di L è un omomorfismo di algebre di Lie $L \to \mathfrak{gl}(V)$.
(La notazione $\mathfrak{gl}(V)$ significa $End(V)$ dotato della struttura usuale di algebra di Lie $[A,B] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{composizione}}}{AB} - BA$.)

3) In entrambi i casi 1), 2), lo sp. vett. V si dice modulo (o risp. G-modulo, L-modulo).

Date rappr. $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ opp. $\psi: L \to \mathfrak{gl}(V)$, il vettore $(\varphi(g))(v)$ si scrive anche $g \cdot v$ opp. gv, dati $g \in G$ e $v \in V$.

Il vettore $(\psi(x))(v)$ si scrive anche $x.v$ opp. xv.

4) Un sottosp. vett. $W \subseteq V$ si dice un <u>sottomodulo</u> (o risp. G-sottom., L-sottomodulo) se $\forall g \in G\ \forall w \in W$: $gw \in W$, rispett. $\forall x \in L\ \forall w \in W$: $xw \in W$.

5) V si dice <u>irriducibile</u> se ha esattamente <u>due</u> sottomoduli: $\{0\}$ e V. (Oss.: $\{0\}$, V sono sempre sottomoduli di V, ovviamente. Se V è irriducibile, in particolare $V \neq \{0\}$.)

6) V si dice <u>completamente riducibile</u> se è somma diretta (anche con infiniti addendi) di sottomoduli irriducibili.

7) Dati due moduli V, W la somma diretta $V \oplus W$ ha struttura naturale di modulo:

$$g \cdot (v+w) = gv + gw \qquad \forall g \in G\ \forall v \in V\ \forall w \in W$$

risp.

$$x.(v+w) = xv + xw \qquad \forall x \in L,\ \forall v \in V,\ \forall w \in W$$

<u>Oss.</u>: 1) Talvolta si usa una definizione alternativa di modulo, es. G-modulo, richiedendo l'esistenza di un „prodotto" $\begin{array}{l} G \times V \to V \\ (g, v) \mapsto gv \end{array}$ invece di un omomorfismo $G \to GL(V)$ come qui. Le nozioni sono equivalenti, si verifica facilmente.

In particolare, uno degli assiomi di questo prodotto è

$$g(hv) = (gh)v \qquad \forall g,h \in G \quad \forall v \in V$$

ed è equivalente a richiedere $\varphi(g) \circ \varphi(h) = \varphi(gh)$.

2) Un modulo di dimensione 1 è automaticamente irriducibile.

3) Dato $V \neq \{0\}$ modulo di dim. finita, V ha almeno un sottomodulo irriducibile. Infatti basta prendere un sottomodulo $W \subseteq V$ di dimensione minima $\neq 0$. Allora W è irriducibile.

4) Se G è un gruppo topologico e $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e se V ha dim. finita,

allora si richiede usualmente che una rappr. $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ sia anche <u>continua</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Dato $G \leq GL(n,k)$ $(n \geq 1)$, allora $V = k^n$ è un G-modulo naturalmente, considerando $\varphi: G \to GL(n,k)$ l'inclusione.

Ad es. $G = GL(n,k)$: in questo caso $V = k^n$ è un G-modulo irriducibile. Infatti dato $w \in V$ qualsiasi con $w \neq 0$, e dato $\tilde{w}$ ancora qualsiasi $\neq 0$, esiste $g \in G$ tale che $gw = \tilde{w}$.

Quindi se $W \neq \{0\}$ è un sottomodulo, contiene tutti i vettori non nulli di V, cioè $W = V$.

2) Se $\varphi: G \longrightarrow H$ è omomorfismo con $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$, $H \subseteq GL(m,\mathbb{R})$ come prima, allora

$V = \mathbb{R}^n$ è naturalmente anche un G-modulo, pensando φ come omomorfismo $\varphi : G \to GL(n, \mathbb{R})$.

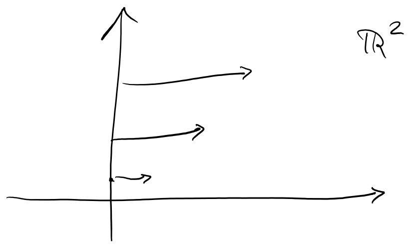
3) Se $\varphi : G \to GL(V)$ è l'omom. banale ($\varphi(g) = Id_V \ \forall g \in G$), allora V si dice <u>banale</u>.

Oss. che in questo caso ogni sottosp. vett. di V è un sottomodulo.

4) $F = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$. Consid. $(F, +)$ come gruppo topologico,

e
$$\varphi : F \longrightarrow GL(2, F)$$
$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E' una rappresentazione (continua), e rende F^2 un G-modulo



<u>Esercizio</u>: Questo modulo ha esattamente 3 sottomoduli:

$$\{0\}, \quad F^2, \quad F \cdot \underbrace{e_1}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Dedurre che F^2 <u>non è completamente riducibile</u>.

5) $P = \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} \ell & n-\ell \end{array} \\ \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{*} & * \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \subseteq GL(n, k) \qquad (\text{con } 1 \leq \ell < n)$

Come prima, k^n è naturalmente un P-modulo, e ammette un sottomodulo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}}\right\} \ell \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} n-\ell \end{matrix} \right\}.$$

6) Di nuovo sia $F = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$. Sia $F^* = F \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} F^* &\longrightarrow GL(n, F) \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è una rappresentazione, non banale, continua, e qui ogni sottosp. vett. è un sottomodulo.

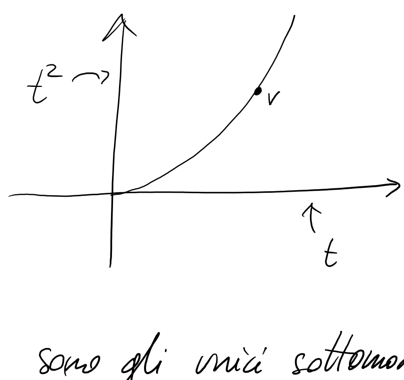
7)

$$\begin{aligned} F^* &\longrightarrow GL(n, F) \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{a_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ fissati.

Anche questa è una rappresentazione continua, e ci sono (almeno) n sottomoduli: $Fe_1, \dots, Fe_n$ $\quad((e_1, \dots, e_n) = \text{base canonica})$

es. $F = \mathbb{R}$, $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$



<u>Esercizio</u> (difficile) Capire quando $Fe_1, \dots, Fe_n$ sono gli unici sottomoduli di F^n (c'è una condiz. semplice sugli esponenti $a_1, \dots, a_n$).