TOKEN: 507614

Esercizio. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che non è l'esponenziale di alcuna matrice in $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Svolgimento: Sia per assurdo $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ tale che $e^X = A$.

Osserviamo che A non è diagonalizzabile, quindi neanche X può essere diagonalizzabile (se fosse $X = CDC^{-1}$ con D diagonale, allora avrei $e^X = e^{CDC^{-1}} = C \underbrace{e^D}_{\nwarrow \text{diagonale}} C^{-1}$)

Sappiamo che in $M_2(\mathbb{C})$, X è simile a una matrice triang. sup.:

$$X = EFE^{-1} \quad \text{con } E \in Gl(2,\mathbb{C}),\ F \in M_2(\mathbb{C}) \text{ triang. sup.},$$

e F deve essere del tipo

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(se sulla diag. avessi due entrate distinte, F e X sarebbero diagonalizzabili).

Abb. $$e^X = e^{EFE^{-1}} = E e^F E^{-1}$$

dove $e^F = \begin{pmatrix} e^\lambda & * \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$. D'altronde e^F ed $e^X = A$ hanno gli stessi autovalori, quindi $e^\lambda = -1$.

Deduciamo $\lambda = i\pi(2k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Inoltre $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, quindi F deve avere traccia nulla, cioè $2\lambda = 0$: assurdo.

$\square$

Esempio: Vogliamo applicare la teoria svolta finora a sottogruppi chiusi di $GL(n,\mathbb{C})$. Usiamo l'approccio seguente.

Consideriamo $M_n(\mathbb{C})$ identificata con una sottoalgebra di $M_{2n}(\mathbb{R})$.

Per farlo, iniziamo ponendo:

$$\underline{i} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

e definiamo $M = \{ A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot A \}$.

Studiamo gli elem. di M:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \quad \text{con } A \in M_{2n}(\mathbb{R}), \; B, C, D, E \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A \cdot \underline{i} = \begin{pmatrix} -C & B \\ -E & D \end{pmatrix}, \qquad \underline{i} \cdot A = \begin{pmatrix} D & E \\ -B & -C \end{pmatrix}$$

quindi $A \in M \iff D = -C,\ B = E$. Cioè le matr. di M sono quelle della forma

con B, C qualsiasi $\in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \underline{i} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Vogliamo identificare A con la matrice $B + \underset{\in \mathbb{C}}{i} C \in M_n(\mathbb{C})$.

Per farlo, consideriamo $M_{2n}(\mathbb{C})$. Essa contiene M, e contiene anche

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in M_n(\mathbb{C}) \right\}$$

ed è facile verificare che

$$\varphi : \tilde{M} \longrightarrow M$$
$$\begin{pmatrix} B+iC & 0 \\ 0 & B+iC \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \underline{i} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di algebre $/\mathbb{R}$.

(Questo ci permette di dare a M anche una struttura naturale di sp. vett. $/\mathbb{C}$, definendo la molt. per $i \in \mathbb{C}$ come la molt. per la matrice $\underline{i}$.)

Inoltre $A \in M_n(\mathbb{C})$ è invertibile $\iff \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ è invertibile in $\tilde{M} \iff \varphi\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ è invertibile in $M_{2n}(\mathbb{R})$.

Quindi φ induce un isomorfismo di gruppi

$$\varphi|_{GL(n,\mathbb{C})} : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow M \cap GL(2n,\mathbb{R})$$

La sua immagine è un sottogruppo chiuso di $GL(2n,\mathbb{R})$, e φ è continua con inversa continua.

Quindi possiamo identificare $GL(n,\mathbb{C})$ con un sottogruppo chiuso di $GL(2n,\mathbb{R})$. Da questo deriva che anche ogni sgr chiuso di $GL(n,\mathbb{C})$ è identificato con un sgr chiuso di $GL(2n,\mathbb{R})$, e possiamo applicare la teoria vista finora.

Ma attenzione:

1) il parametro $t\in\mathbb{R}$ che abbiamo usato finora non viene rimpiazzato da un parametro complesso, ad esempio:

$$\mathrm{Lie}(\underset{G\subseteq GL(n,\mathbb{C})}{G}) = \{ X\in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid e^{tX} \underset{\substack{\text{visto}\\ \text{dentro } GL(2n,\mathbb{R})}}{\in G} \quad \forall t \underset{\text{non in } \mathbb{C}}{\in\mathbb{R}} \} =$$

$$\underset{\substack{\text{identif.}\\ \text{tramite } \varphi}}{=} \{ X\in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \underset{\substack{\text{rimanendo con}\\ G \text{ dentro } GL(n,\mathbb{C})}}{\in G} \quad \forall t\in\mathbb{R} \}$$

2) $\mathrm{Lie}(G)$ è un sottosp vettoriale <u>reale</u> di $M_n(\mathbb{C})$ in questo caso.

<u>Esempio:</u> $\{ A\in GL(n,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A^{-1} \}$ è un sgr chiuso di $GL(n,\mathbb{C})$

e ha alg. di Lie $\{ X\in M_n(\mathbb{C}) \mid A + {}^t\bar{A} = 0 \}$.

Spesso si usa la notazione $U(n)$ per questo gruppo, e $\mathfrak{u}(n)$ per quest'algebra.

Esempi: $B(n) = \{ \text{matr. triang. sup. in } GL(n,\mathbb{R}) \}$

$$U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R}) \right\}$$

Le loro algebre di Lie sono

$\mathfrak{b}(n) = \{ \text{matr. triang. sup. in } \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \}$

$$\mathfrak{u}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \right\}$$

Infatti è ovvio che $\mathfrak{b}(n) \subseteq Lie(B(n))$ e $\mathfrak{u}(n) \subseteq Lie(U(n))$.

Inoltre $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{come sp.} \\ \text{vett.}}}{\dim(\mathfrak{b}(n))} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come} \\ \text{varietà}}}{\dim(B(n))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché abb. visto che} \\ \exp \text{ dà una carta} \\ \text{locale su } G \text{ con} \\ \text{dominio un ap. di } Lie(G)}}{=} \dim(Lie(B(n)))$

e allora $\mathfrak{b}(n) = Lie(B(n))$ e allo stesso modo $\mathfrak{u}(n) = Lie(U(n))$.

Lo spazio tangente a $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$

Def.: Sia M sottovar. diff. immersa in $\mathbb{R}^n$, e $p \in M$.

Lo spazio tangente a M in p è:

$$T_pM = \{ \alpha'(0) \mid \alpha: I \longrightarrow M \text{ di classe } C^\infty,\ I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo aperto contenente } 0 \in \mathbb{R},\ \alpha(0) = p \}$$

Teorema: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ un sgr chiuso. Vale
$$\mathrm{Lie}(G) = T_{I_n} G.$$

Dim.: $\subseteq$) Data $X \in \mathrm{Lie}(G)$ basta consid. $\alpha : \mathbb{R} \to G$, $t \mapsto e^{tX}$

e ricordare che $\alpha'(0) = X$.

$\supseteq$) Sia $v \in T_{I_n} G$, e sia $\alpha : I \to G$ C^∞ con
$\alpha(0) = I_n$, $\alpha'(0) = v$.

A meno di rimpicciolire I, possiamo scrivere
$$\alpha(t) = e^{\beta(t)} \quad \text{con } \beta : I \to \mathrm{Lie}(G) \text{ di classe } C^\infty,$$
$\beta(0) = 0$.

Osserviamo che $\beta'(0) = \frac{d}{dt}\left(t \cdot \beta'(0)\right)\Big|_{t=0}$

per cui
$$v = \frac{d}{dt} e^{\beta(t)}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\cdot\beta'(0)}\Big|_{t=0} = \beta'(0).$$

Inoltre la curva β è tutta contenuta nel sottosp. vettoriale $\mathrm{Lie}(G)$, quindi anche $\beta'(0)$ è in $\mathrm{Lie}(G)$. $\square$

Cenni sulla def. dell'algebra di Lie per un gruppo di Lie generale

Si prende G gruppo di Lie, si considerano campi vettoriali tangenti a G, cioè applicazioni C^∞ del tipo $g \longmapsto v_g \in T_g G$ per $g \in G$. Per definirli correttamente, si interpretano i vettori di $\mathbb{R}^n$ identificandoli con le corrispondenti derivate direzionali, e identificando un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{R}^n$: $x \longmapsto v_x$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $v_x \in \mathbb{R}^n$) con l'applicazione

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v_x}$$

Risultano tutte applicazioni che soddisfano la regola di Leibniz:

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g).$$

Inoltre vale il viceversa: ogni δ siffatta corrisp. a un campo vettoriale.

Conseguenza: si possono definire i campi vettoriali tangenti a una varietà diff. astratta M come le derivazioni di $C^\infty(M, \mathbb{R})$, cioè

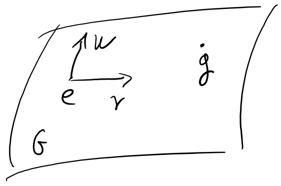
$$\{\delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \delta \text{ lineare, } \delta(fg) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g)\}$$

Inoltre in generale $\delta \circ \varepsilon$ non è una derivazione, e avviene che $\delta \circ \varepsilon$ può essere diverso da $\varepsilon \circ \delta$, e vale:

$\delta \circ \varepsilon - \varepsilon \circ \delta$ $\underline{\text{è}}$ una derivazione.

Questo si usa per definire la struttura di algebra di Lie su $T_e G$ dove G è un gruppo di Lie:

siano $v, w \in T_e G$



si creano due campi vettoriali $\underline{v}$, $\underline{w}$ su G, definendo

$\underline{v}_g \in T_g G$ come il differenziale di $\begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gx \end{array}$ in $e \in G$

e si definisce $[v, w]$ in $T_e G$ come $\underline{v} \circ \underline{w} - \underline{w} \circ \underline{v}$.