Coordinate esponenziali su sottogruppi chiusi di $M_n(\mathbb{R})$

<u>Teorema:</u> Sia $H \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sottogruppo chiuso. Esiste un intorno V di 0 in $Lie(H)$ tale che l'applicazione $\exp|_V : V \to \exp(V)$ è un omeomorfismo, ed esiste U intorno di I_n in $GL(n,\mathbb{R})$ tale che $\exp(V) = H \cap U$ (cioè $\exp(V)$ è un intorno di I_n in H con top. di sottospazio) per una scelta opportuna di V.

<u>Dim.:</u> Ricordiamo il prodotto scalare su $M_n(\mathbb{R})$ scritto come $tr(A \cdot {}^tB)$, e definiamo

$$W = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(X \cdot {}^tY) = 0 \quad \forall Y \in Lie(H) \}$$

cioè il complem. ortogonale di $Lie(H)$:

$$M_n(\mathbb{R}) = Lie(H) \oplus W.$$

Usiamo l'applicazione
$$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto e^{X_1} \cdot e^{X_2}$$

dove $X = X_1 + X_2$ e $X_1 \in Lie(H)$ e $X_2 \in W$.

L'appl. φ è C^∞, $\varphi(0) = I_n$, calcoliamo il diff. di φ in 0 usando $X \in M_n(\mathbb{R})$ fissata e un parametro $t \in \mathbb{R}$ e calcolando

$$\varphi(tX) = \left(I_n + tX_1 + \frac{t^2}{2}X_1^2 + \dots\right)\left(I_n + tX_2 + \frac{t^2}{2}X_2^2 + \dots\right) =$$

$$= I_n + t\underbrace{(X_1 + X_2)}_{X} + t^2 F_X(t) \qquad \text{con } F_X \ C^\infty$$

Segue: il diff. di φ in 0 è l'identità.

Per il teorema della funzione inversa, esiste $\sigma > 0$ tale che

$$\varphi|_{B_\sigma(0)} : B_\sigma(0) \longrightarrow \varphi(B_\sigma(0))$$

ha immagine aperta, è biiettiva con inversa C^∞.

Poniamo $\tilde{V} = Lie(H) \cap B_\sigma(0)$, allora

$$\varphi|_{\tilde{V}} = \exp|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow \exp(\tilde{V})$$

è un omeomorfismo. Osserviamo che se V è un intorno di 0 in $Lie(H)$ ed è contenuto in $\tilde{V}$, allora $\exp|_V : V \to \exp(V)$ è anch'esso un omeomorfismo.

Vogliamo far vedere che possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varphi(B_\varepsilon(0)) \cap H \subseteq \exp\left(B_\varepsilon(0) \cap \mathrm{Lie}(H)\right).$$

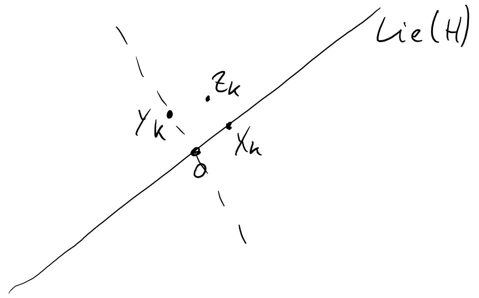
Per assurdo, supponiamo che $\forall \varepsilon$ con $0 < \varepsilon \leq \sigma$ abb.

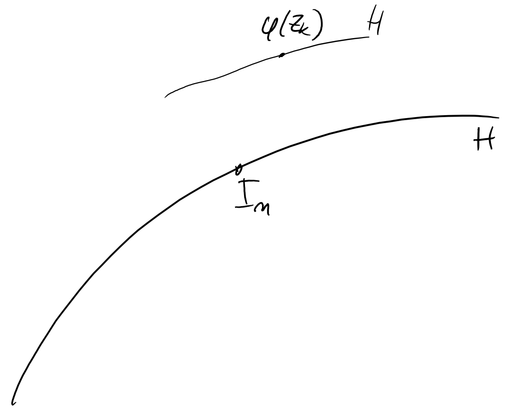
$$\varphi(B_\varepsilon(0)) \cap H \nsubseteq \exp\left(B_\varepsilon(0) \cap \mathrm{Lie}(H)\right).$$

Conviene „usare gli interi", quindi riformuliamo dicendo che

$\forall k \in \mathbb{Z}$ tale che $k \geq \frac{1}{\sigma}$ $\exists Z_k \in B_{\frac{1}{k}}(0) \mid \varphi(Z_k) \in H$

ma $\varphi(Z_k) \notin \exp\left(B_{\frac{1}{k}}(0) \cap \mathrm{Lie}(H)\right)$:





Scriviamo

$$Z_k = X_k + Y_k$$

dove $X_k \in \mathrm{Lie}(H)$, $Y_k \in W$, $Y_k \neq 0$ (oss.: $\|X_k\|, \|Y_k\| < \frac{1}{k}$).

Inoltre $\varphi(Z_k) = e^{X_k} e^{Y_k}$, ma $e^{X_k} \in H$, quindi $e^{Y_k} \in H$.

L'obiettivo è quello di usare gli Y_k per costruire una matrice $Y \in W$ tale che $e^{tY} \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Per individuare la „direzione" di Y, si normalizzano gli Y_k, ma si normalizzano usando $\mathbb{Z}$: scegliamo $\forall k$ un intero $m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che

$$\sigma \leq m_k \|Y_k\| \leq 2\sigma$$

Allora la successione $m_k Y_k$ è limitata, possiamo rimpiazzarla con una sottosucc. convergente, e $\lim_{k\to+\infty} m_k Y_k = Y$ soddisfa

$Y \in W$, $Y \neq 0$ (perché $\|Y\| \geq \sigma$).

Inoltre $e^{Y_k} \in H$, quindi $e^{m_k Y_k} = (e^{Y_k})^{m_k} \in H$ e allora

uso la normalizzaz. "approssimata"

$e^Y \in H$ perché H è chiuso.

Dimostriamo che $e^{tY} \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Scriviamo $t m_k = a_k + b_k$ con $a_k \in \mathbb{Z}$ e $b_k \in [0,1[$. Allora:

$$e^{t m_k Y_k} = e^{a_k Y_k + b_k Y_k} = (e^{Y_k})^{a_k} \underbrace{e^{b_k Y_k}}$$

Ora b_k è limitata e $Y_k \xrightarrow[k]{} 0$, quindi $e^{b_k Y_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$.

Allora

$$e^{tY} = \lim_{k\to+\infty} e^{t m_k Y_k} = \boxed{\lim_{k\to+\infty} \underbrace{(e^{Y_k})^{a_k}}_{\in H} \in H}$$

Concludiamo che $Y \in Lie(H) \cap W$, ma $Y \neq 0$: assurdo.

Segue: $\exists \varepsilon > 0 \mid \varphi(B_\varepsilon(0)) \cap H \subseteq \exp(B_\varepsilon(0) \cap Lie(H))$.

Allora scegliamo $V = B_\varepsilon(0) \cap Lie(H)$ e $U = \varphi(B_\varepsilon(0))$, e segue:

$$\exp(V) = \varphi(B_\varepsilon(0) \cap Lie(H)) \subseteq \varphi(B_\varepsilon(0)) \cap H \subseteq \exp(B_\varepsilon(0) \cap Lie(H)) = \exp(V)$$

e allora $\exp(V) = \varphi(B_\varepsilon(0)) \cap H$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Sia G sottogruppo chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$, allora $\exp(Lie(G))$ genera G°.

Per la dimostrazione:

<u>Lemma</u>: Sia H in generale un gruppo topologico connesso, e sia U un intorno dell'elem. neutro. Allora U genera H.

<u>Dim. del lemma</u>: Sia K il sottogruppo generato da U, allora K è aperto, perché se contiene $g \in K$ allora contiene anche gU = l'immagine di U tramite la traslaz. a sinistra per g.
Quindi K è intorno di ogni suo punto.
Inoltre $H \setminus K$ è anch'esso aperto, infatti se contiene $x \in H \setminus K$ allora contiene xU^{-1} (U^{-1} è anch'esso intorno dell'elem. neutro, e se per assurdo $xu^{-1} \in K$ per un $u \in U$, allora avrei $x \in K$).
Deduciamo: $K = H$ perché H è connesso. $\square$

<u>Dim. del corollario</u>: Basta osservare che $\exp(Lie(G))$ è contenuto in G°, e contiene un intorno di I_n in G per il teorema precedente.
Per il lemma, $\exp(Lie(G))$ genera G°.

$\square$

<u>Corollario</u>: Siano $G, H \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ connessi. Se $Lie(G) = Lie(H)$ allora $G = H$.

<u>Dim.</u>: Immediata dal corollario precedente $\left(\exp(Lie(G)) = \exp(Lie(H)) \right)$. $\square$

<u>Osservazione</u>: Non è vero che se due sottogruppi chiusi in qualche $GL(n)$ sono isomorfi se hanno algebre di Lie isomorfe.

Ad esempio S^1 e $(\mathbb{R},+)$ sono gruppi di matrici

$\left((\mathbb{R},+) \text{ può essere identificato con } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \right)$

e hanno entrambi algebra di Lie di dimensione 1 e quindi isomorfe (infatti dim. $1 \Rightarrow$ abeliana), ma i gruppi non sono isomorfi (non sono neppure isomorfi come gruppi astratti, perché S^1 ha elem. di ordine finito ma $(\mathbb{R},+)$ no).

<u>Struttura di varietà differenziabile su sottogruppi chiusi di $GL(n,\mathbb{R})$.</u>

<u>Def.</u>: Sia M una varietà differenziabile di dim. n e $N \subseteq M$.
N è una <u>sottovarietà immersa</u> (= embedded submanifold) di dim. m $(\leq n)$ se ogni punto di N ha una carta locale (di M) $\varphi: U \to V$ (dove $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, $V \subseteq M$ è aperto) tale che

$$\varphi^{-1}(V \cap N) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0 \}$$

Oss.: Ricordiamo che in questo caso N eredita una struttura di var. diff. di dim m da quella di M.

Def.: Un gruppo di Lie (su $\mathbb{R}$) è un gruppo topologico e contemp. una varietà differenziabile tale che la moltiplicazione e l'inverso siano C^∞.

Teorema: Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso. Allora G è una sottovarietà immersa di $GL(n, \mathbb{R})$ ed è un gruppo di Lie (con la struttura diff. ereditata).

Dim.: Per il teorema precedente esiste Ω intorno di 0 in $M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\Phi = \exp|_{\Omega} : \Omega \to \exp(\Omega)$$

è diffeomorfismo, $\exp(\Omega)$ è aperto in $GL(n, \mathbb{R})$, e

$\Phi(\Omega \cap Lie(G)) = \Phi(\Omega) \cap G$.

Quindi, a meno di cambiare linearmente coordinate in $M_n(\mathbb{R})$, $(\Phi, \Omega, \Phi(\Omega))$ è una carta locale compatibile con la def. di sottovarietà immersa, nel punto $I_n \in G$.

Sia ora $A \in G$ qualsiasi, usiamo

$$\begin{aligned} \Phi_A : \Omega &\longrightarrow A\exp(\Omega) \\ X &\longmapsto Ae^X \end{aligned}$$

Anch'essa è un diffeomorfismo, $A\exp(\Omega)$ è intorno aperto di A in G,

e $$\Phi_A(\Omega \cap Lie(G)) = G \cap \Phi_A(\Omega)$$

(l'inclusione $\supseteq$ segue dal fatto che se Ae^X con $X \in \Omega$ appartiene a G allora $e^X \in G$ e allora $X \in Lie(G)$).

$\square$