Per la fine della dim. precedente: basta scegliere X_0 di norma 1 e Y_0 di norma 1, porre $X = sX_0$ e $Y = tY_0$, e usare la stima della fine della dim. applicata a sX_0, tY_0 al posto di sX, tY.

Per dim. che $Lie(G)$ è chiuso risp. alla somma e al bracket se $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ è un sottogr. chiuso, conviene studiare anche

e^{X+Y} cercando di scriverlo con esponenziali.

<u>Idea:</u>

$$\left(e^{\frac{X}{k}+\frac{Y}{k}}\right)^k = e^{X+Y} \qquad \left(e^{\frac{X}{k}}\right)^k = e^X$$

$$\left(e^{\frac{Y}{k}}\right)^k = e^Y$$

invece $$\left(e^{[\frac{X}{k},\frac{Y}{k}]}\right)^k = \left(e^{\frac{1}{k^2}[X,Y]}\right)^k = e^{\frac{1}{k}[X,Y]} \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$$

similmente avremo $$\left(e^{R(\frac{X}{k},\frac{Y}{k})}\right)^k \to I_n$$

<u>Proposizione:</u> Siano $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$; abb.

$$e^{X+Y} = \lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{X}{k}}\, e^{\frac{Y}{k}}\right)^k$$

$$e^{[X,Y]} = \lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{X}{k}}\, e^{\frac{Y}{k}}\, e^{\frac{-X}{k}}\, e^{\frac{-Y}{k}}\right)^{k^2}$$

Dim.: Dal lemma precedente, per k abb. grande vale

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} = e^{\frac{1}{k}(X+Y) + \frac{1}{2k^2}[X,Y] + R\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right)},$$

ricordiamo anche $\|R(X,Y)\| \leq C \cdot \left(\|X\| + \|Y\|\right)^3$, cioè

$$\left\| R\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right)\right\| \leq C \cdot \frac{1}{k^3}\left(\|X\| + \|Y\|\right)^3$$

Quindi

$$\lim_{k \to +\infty} k R\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right) = 0$$

(oppure k^2)

Allora

$$\left(e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k = e^{X+Y+\boxed{\frac{1}{2k}[X,Y]} + \boxed{kR\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right)}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} e^{X+Y}$$

Quindi il primo limite è giusto, dimostriamo il secondo.

Abbiamo

$$e^{\frac{1}{k}X} e^{\frac{1}{k}Y} e^{-\frac{1}{k}X} e^{-\frac{1}{k}Y} = e^{\overbrace{\boxed{\frac{1}{k}(X+Y) + \frac{1}{2k^2}[X,Y] + R\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right)}}^{A(k)}} \cdot e^{\underbrace{\boxed{-\frac{1}{k}(X+Y) + \frac{1}{2k^2}[X,Y] + R\left(\frac{-X}{k}, \frac{-Y}{k}\right)}}_{B(k)}}$$

A, B definite per k abb. grande.

Riusando il lemma, il prodotto di sopra è uguale a

$$e^{\frac{1}{k^2}[X,Y] + R\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}\right) + R\left(\frac{-X}{k}, \frac{-Y}{k}\right) + \frac{1}{2}[A(k), B(k)] + R(A(k), B(k))}$$

Ora osserviamo che $A(k)$ si può scrivere come

$A(k) = \frac{1}{k}\tilde{A}(k)$ e $B(k) = \frac{1}{k}\tilde{B}(k)$ con $\tilde{A}(k)$ e $\tilde{B}(k)$ limitate.

Da questo segue che $\| R(A(k), B(k)) \| \leq \tilde{C} \cdot \frac{1}{k^3}$

Allora l'espressione che vogliamo è quella di prima elevata alla k^2

cioè

$$e^{[X,Y] + \underbrace{k^2 R(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k})} + \underbrace{k^2 R(\frac{-X}{k}, \frac{-X}{k})} + \underbrace{\frac{1}{2}k^2 [A(k), B(k)]} + \underbrace{k^2 R(A(k), B(k))}}$$

Studiamo allora $\frac{1}{2}k^2 [A(k), B(k)]$:

$$[A(k), B(k)] = [\tfrac{1}{k}\tilde{A}(k), \tfrac{1}{k}\tilde{B}(k)] = \frac{1}{k^2}[\tilde{A}(k), \tilde{B}(k)]$$

D'altronde $\tilde{A}(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} X+Y$ e $\tilde{B}(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} -(X+Y)$

quindi

$$\frac{1}{2}k^2 [A(k), B(k)] = \frac{1}{2}[\tilde{A}(k), \tilde{B}(k)] \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2}[X+Y, -(X+Y)] = 0$$

Concludiamo che il lim. per $k \to +\infty$ è uguale a $e^{[X,Y]}$. $\square$

<u>Teorema:</u> Dato $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sottogr. chiuso, l'insieme $Lie(G)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

<u>Dim.:</u> Che $Lie(G)$ sia invariante per riscalaggio con fattori $\alpha \in \mathbb{R}$ è ovvio dalla def., che sia chiuso per somma e bracket segue dalla prop. precedente, grazie al fatto che G è chiuso. $\square$

Esempi: 1) $\mathrm{Lie}(GL(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$

(ovvio, abb. già osservato che e^A è invertibile $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$)

2) Troviamo $\mathrm{Lie}(SL(n,\mathbb{R}))$, esaminando la condizione

$$\det(e^A) = 1 \qquad \text{per } A \in M_n(\mathbb{R})$$

Usiamo $M_n(\mathbb{C})$, e il fatto già visto che A è simile (in $M_n(\mathbb{C})$) ad una matrice triang. sup.:

$$A = CBC^{-1}$$

per qualche $C \in GL(n,\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ con

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di B e di A,

$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = tr(B)$, $\quad tr(A) = tr(B)$.

Abbiamo

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Concludiamo:

$$\boxed{\det(e^A)} = \det(e^{CBC^{-1}}) = \det(C e^B C^{-1}) =$$

$$\det(e^B) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{tr(B)} = \boxed{e^{tr(A)}}$$

Segue che $e^A \in SL(n,\mathbb{R}) \iff e^{tr(A)} = 1 \iff tr(A) = 0$.

Quindi

$\boxed{A \in Lie(SL(n,\mathbb{R}))} \implies e^A \in SL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow tr(A) = 0$, cioè

$\boxed{A \in sl(n,\mathbb{R})} \implies tr(tA) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{tA} \in SL(n,\mathbb{R})$

$\forall t$ cioè $A \in Lie(SL(n,\mathbb{R}))$

Cioè $Lie(SL(n,\mathbb{R})) = sl(n,\mathbb{R})$.

3) Consid. $O(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = I_n \}$

Data $X \in M_n(\mathbb{R})$, se $X + {}^tX = 0$ allora

$s{}^tX = -sX \quad \forall s \in \mathbb{R}$, da cui

$$e^{s{}^tX} = e^{-sX} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e quindi $${}^t\left(e^{sX}\right) = \left(e^{sX}\right)^{-1} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Segue: $Lie(O(n,\mathbb{R})) \supseteq \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0 \} = so(n,\mathbb{R})$

Viceversa, se abb. $X \in Lie(O(n,\mathbb{R}))$, allora

$${}^t\left(e^{sX}\right) = \left(e^{sX}\right)^{-1} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

cioè $$e^{s{}^tX} = e^{s(-X)} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Scelgo $s_0 > 0$ abb. piccolo da poter dedurre $s_0{}^tX = s_0(-X)$

e allora ${}^tX = -X$. Segue anche l'altra inclusione:

$$Lie(O(n,\mathbb{R})) = so(n,\mathbb{R})$$

Perché i due nomi non corrispondono?

Il motivo è che $O(n,\mathbb{R})$ è un gruppo <u>sconnesso</u>, ha un sottogruppo di indice 2 che è $SO(n,\mathbb{R})$, e $SO(n,\mathbb{R})$ contiene $O(n,\mathbb{R})^\circ$ = comp. connessa contenente I_n (questo si vede usando l'applic. continua $\det|_{O(n,\mathbb{R})} : O(n,\mathbb{R}) \to \{+1,-1\}$).

Sia ora $X \in so(n,\mathbb{R})$, allora abb. visto $e^{tX} \in O(n,\mathbb{R})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, d'altronde $t \mapsto e^{tX}$ è continua, $\mathbb{R}$ è connesso, quindi $t \mapsto e^{tX}$ ha immagine connessa. Cioè è tutta contenuta in $SO(n,\mathbb{R})$.

Inoltre ovviam. se $X \in Lie(SO(n,\mathbb{R}))$ allora $X \in Lie(O(n,\mathbb{R}))$.

Concludiamo:

$$Lie(SO(n,\mathbb{R})) = so(n,\mathbb{R})$$

<u>Oss. generale</u>: Con lo stesso ragionam. fatto per $SO(n,\mathbb{R})$ si deduce che dato $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ sottogr. chiuso, allora

$$Lie(G^\circ) = Lie(G).$$

<u>Esercizio</u>: Consid. $Sp(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A J_n {}^tA = J_n \}$

dove n è pari e

$$J_n = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n/2}\underbrace{\qquad\qquad}_{n/2}$$

Dimostrare che

$$\mathrm{Lie}(Sp(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X J_n + J_n {}^tX = 0 \}$$