Token: 120633

Da lunedì prossimo: ricevimento (lunedì online, venerdì in presenza), dettagli sul sito del corso.

Algebre di Lie in generale

In questa sezione k è un campo qualsiasi.

Def.: Sia L uno spazio vettoriale su k. Sia inoltre

$$\begin{aligned} L \times L &\longrightarrow L \\ (x,y) &\longmapsto [x,y] \in L \end{aligned}$$

un'applicazione bilineare. Allora L si dice algebra di Lie con bracket $[-,-]$ se:

1) vale $[x,x]=0 \quad \forall x \in L$.

2) vale l'identità di Jacobi:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \qquad \forall x,y,z \in L$$

Oss.: 1) L'identità di Jacobi corrisponde a una proprietà importante dei gruppi di Lie, ma non lo vedremo subito.

2) L'assioma n.1 si chiama spesso antisimmetria. Effettivam. dati $x,y \in L$ qualsiasi, abb.:

$$0=[x+y,x+y]=\cancel{[x,x]}+[x,y]+[y,x]+\cancel{[y,y]}$$

e quindi $[x,y]=-[y,x]$.

Esercizio: Dimostrare che, senza assumere $[x,x]=0$, vale:

se $[x,y]=-[y,x]$ $\forall x,y \in L$ e $\mathrm{char}(k)\neq 2$, allora $[x,x]=0$ $\forall x \in L$.

Esempi: 1) Sia L spazio vettoriale qualsiasi, e poniamo $[x,y]=0$ $\forall x,y \in L$. Questo definisce un'algebra di Lie detta abeliana o commutativa.

Attenzione alla terminologia: la parola commutativa è scelta pensando all'es. delle matrici con bracket $[A,B]=AB-BA$, però un'algebra di Lie in generale non è un anello, non è definito un „prodotto".

2) $L = M_n(k)$ è un'algebra di Lie con bracket $[A,B] = AB - BA$. Questa algebra di Lie si denota anche con $\mathfrak{gl}(n,k)$ opp. $\mathfrak{gl}(n)$ (se non c'è ambiguità sul campo). Verifichiamo gli assiomi:

- questo bracket è bilineare;
- $[A,A]=0 \quad \forall A \in M_n(k)$
- $$[X,[Y,Z]] = X(YZ-ZY) - (YZ-ZY)X =$$
$$= XYZ - XZY - YZX + ZYX$$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = \cancel{XYZ} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{ZYX} +$$
$$+ \cancel{YZX} - \cancel{YXZ} - \cancel{ZXY} + \cancel{XZY} +$$
$$+ \cancel{ZXY} - \cancel{ZYX} - \cancel{XYZ} + \cancel{YXZ} = 0$$

3) Sia M un'algebra <u>associativa</u> sul campo k (= uno sp. vettoriale su k e contemp. un anello), allora M è naturalmente dotata di struttura di algebra di Lie, usando la stessa formula $[A,B] = AB - BA$

prodotto in M

4) Sia L algebra di Lie di dim. 1 su k.
Allora L è commutativa.

Infatti scegliamo x_0 base di L, allora ogni elem. x si scrive come $\alpha \cdot x_0$ con $\alpha \in k$, quindi dati x, y qualsiasi in L, scriviamo $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0$ con $\beta \in k$, e allora

$$[x,y] = [\alpha x_0, \beta y_0] = \alpha\beta [x_0, x_0] = 0$$

Def.: Sia L un'algebra di Lie, e $M \subseteq L$ un sottosp. vettoriale.

1) M si dice <u>sottoalgebra di Lie</u> di L se $\forall x, y \in M$: $[x,y] \in M$. (In tal caso come al solito M è un'algebra di Lie, col bracket „ereditato" da L.)

2) M si dice <u>ideale</u> di L se $\forall x \in M \ \forall y \in L$: $[x,y] \in M$.
(Dalla antisimmetria in L segue che è una condizione equivalente il richiedere che $\forall x \in L \ \forall y \in M$: $[x,y] \in M$.)

3) Sia N un'algebra di Lie e $f: L \to N$ un'applicazione lineare. f si dice <u>omomorfismo di algebre di Lie</u> se $\forall x, y \in L$:

$$f([x,y]) = [f(x), f(y)].$$

Esempi: 1) $$\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{sl}(n,k) = \{ x \in \mathfrak{gl}(n,k) \mid \underbrace{\mathrm{Tr}}_{\text{traccia}}(x) = 0 \}$$

è una sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$. Verifichiamolo: chiaram. è un sottosp. vettoriale, poi:

date $X,Y \in sl(n)$, abb.:

$$Tr([X,Y]) = Tr(XY - YX) = Tr(XY) - Tr(YX) = 0$$

<u>Oss.</u>: $sl(n)$ è una sottoalgebra di Lie di $gl(n)$, ma <u>non è un sottoanello</u>, ad es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin sl(2)$.

però $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in sl(2)$.

2) Altre sottoalgebre di Lie di $gl(n)$

$$b(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \in gl(n) \right\}$$

$$u(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in gl(n) \right\}$$

$$h(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \in gl(n) \right\}$$

$$so(n) = \{ A \in gl(n) \mid A + {}^tA = 0 \}$$

$$sp(n) = \{ A \in gl(n) \mid AJ_n + J_n {}^tA = 0 \} \quad \left(\text{ric.: } J_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & 0 \\ -1 & & & \end{pmatrix} \right)$$

(n <u>pari</u>)

3) <u>Ideali</u>

- $sl(n)$ è un ideale di $gl(n)$
- $z = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}$ è un ideale di $gl(n)$

- Osserviamo che, se $\mathrm{char}(k)$ non divide n, allora $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{sl}(n)$ sono in somma diretta e $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{gl}(n)$.

- $\mathfrak{u}(n)$ è un ideale di $\mathfrak{b}(n)$.

<u>Esercizio</u>: Verificare l'esempio precedente.

<u>Oss.</u>: Una sottoalgebra di Lie N di una sottoalgebra di Lie M di un'alg. di Lie L è una sottoalgebra di Lie di L.
Ma non è detto che se N è un ideale di M e M è un ideale di L, allora N è un ideale di L.

Algebra di Lie di un sottogruppo chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$

<u>Def.</u>: Sia $G \leq GL(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso.
Definiamo
$$\mathrm{Lie}(G) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

<u>Obiettivo</u>: Dimostrare che $\mathrm{Lie}(G)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.
Per dimostrare che è un sottosp. vettoriale (non è ovvio) e che è una sottoalg. di Lie, studiamo $e^X e^Y$.

Lemma: Esistono $\varepsilon>0$ e una funzione continua R definita su $B_\varepsilon(0)\times B_\varepsilon(0)$ a valori in $M_n(\mathbb{R})$ tali che

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+R(X,Y)} \qquad \forall X,Y\in B_\varepsilon(0),$$

e tale che $\|R(X,Y)\|\le C\cdot(\|X\|+\|Y\|)^3$ per una costante C che dip. solo da n.

Dim.: Poniamo

$$R(X,Y)=\log(e^X e^Y)-X-Y-\frac{1}{2}[X,Y].$$

Questa R è ben definita e continua per ε abb. piccolo e $\forall X,Y\in B_\varepsilon(0)$. Inoltre R soddisfa l'uguaglianza.
Va dimostrata la stima, e per questo consid.

$$e^{sX}e^{tY} \quad \text{con} \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Con la stessa idea di prima scriviamo:

$$e^{sX}e^{tY}=e^{Z(s,t)}$$

dove $Z(s,t)=\log(e^{sX}e^{tY})$ è definita e continua in un intorno opportuno di $(0,0)$.
Esplicitiamo $Z(s,t)$ come serie di potenze in s,t:

$$Z(s,t)=\underbrace{(e^{sX}e^{tY}-I_n)}_{\substack{\uparrow\\ \text{matrice a entrate}\\ \text{serie di potenze in } s,t \text{ senza termine noto}}}-\frac{1}{2}(e^{sX}e^{tY}-I_n)^2+(\dots)=$$

$$= \left(\left(I_n + sX + \frac{1}{2} s^2 X^2 \right) \left(I_n + tY + \frac{1}{2} t^2 Y^2 \right) - I_n \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(sX + tY \right)^2 + (\ldots) = \ldots$$

termini di grado totale in s e t almeno 3

$$\ldots = sX + tY + \frac{st}{2} [X, Y] + (\ldots)$$

D'altra parte $Z(s,t) - sX - tY - \frac{st}{2}[X,Y] = R(sX, tY) =$

$$= s^3 F_1(s,t) + s^2 t F_2(s,t) + s t^2 F_3(s,t) + t^3 F_4(s,t)$$

con F_i definite e continue in un intorno di $(0,0)$,

e abb.

$$| R(sX, tY) | \leq C \left(\|s\| + \|t\| \right)^3 \quad \text{per una costante } C.$$

Questo conclude la dim. (domani lo scriviamo meglio).

$\square$