Token: 741992

Sottogruppi a un parametro di $M_n(\mathbb{R})$

Def.: Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

dove $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice fissata. Si tratta di un omomorfismo di gruppi (preso $\mathbb{R}$ con la somma), e si chiama il sottogruppo a un parametro associato ad A (o generato da A).

Lemma: Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ vale

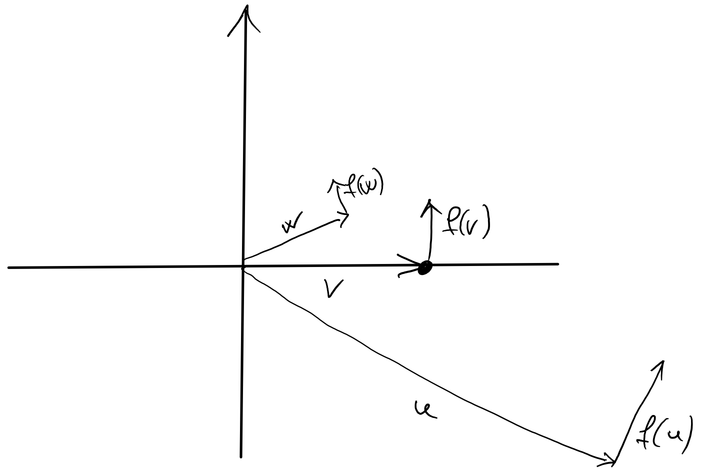
$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0} = A$$

Dim.: La funzione $t \mapsto e^{tA}$ è C^∞, ed è una serie di potenze in t centrata in 0 con raggio di convergenza $+\infty$, quindi basta derivare addendo per addendo (esercizio). $\square$

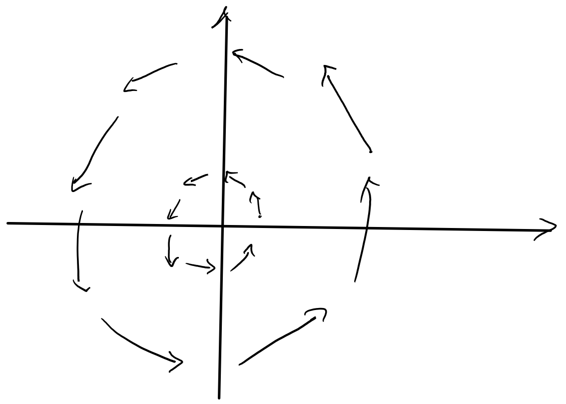
Esempio: $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}} =$ $\quad \left(A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Per „visualizzare" questo sottogruppo a un parametro, parto col visualizzare la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, ma non come applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, bensì: prendo $v \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi e considero $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} v}_{=f(v)}$ in $T_v \mathbb{R}^2$:



Otteniamo un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$:



e e^{tA} è la rotazione dell'angolo t, ed effettivamente la derivata in $t=0$ è la matrice A.

<u>Teorema</u>: Sia $\varphi: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ omomorfismo di gruppi topologici. Allora esiste unica $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\varphi(t) = e^{tA} \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Dim.: L'unicità è chiara dal lemma precedente (se $e^{tA} = e^{tB}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ allora $A = \frac{d}{dt}(e^{tA})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tB})\Big|_{t=0} = B$).

Dimostriamo l'esistenza di A, dato $\varphi: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ omom. di gr. topologici.

Per trovare A (o in realtà tA con $t \neq 0$ piccolo) userò il logaritmo di matrici, e per controllare bene la convergenza conviene "riscalare" φ.

Cioè consid. dato $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon : \mathbb{R} &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\longmapsto \varphi(\varepsilon t) \end{aligned}$$

è anch'esso un omom. di gruppi topologici, e $\varphi(t) = \varphi_\varepsilon(t/\varepsilon)$ $\forall t$.

Possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varphi_\varepsilon(]-2,2[) \subseteq \exp(B_r(0))$ con $r = \frac{\log(2)}{2}$ (ric.: $B_r(0) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|A\| < r\}$).

Oss.: ε esiste perché exp ha inversa continua (log) abb. vicino a I_n, definita (almeno) in $\exp(B_{2r}(0))$, quindi $\exp(B_r(0))$ è aperto.

Sia X con $\|X\| < r$ tale che $e^X = \varphi_\varepsilon(1)$ $(X = \log(\varphi_\varepsilon(1)))$.

Vogliamo verificare che $e^{tX} = \varphi_\varepsilon(t)$ $\forall t$, iniziamo dal valore $t = \frac{1}{2}$.

Sia Z tale che $\|Z\| < r$ e $e^Z = \varphi_\varepsilon(\frac{1}{2})$.

Allora:

$\varphi_\varepsilon(1) = \varphi_\varepsilon(\frac{1}{2}) \cdot \varphi_\varepsilon(\frac{1}{2}) = e^Z \cdot e^Z = e^{2Z}$

cioè $e^{2Z} = e^X$. Per le nostre scelte, $\|2Z\| < \log(2)$,

e quindi $2Z = \log(e^{2Z}) = \log(e^X) = X$.

Concludiamo: $\varphi_\varepsilon(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}X}$.

Posso fare lo stesso ragionam. fatto con X e Z anche con Z e una terza matrice W, e concludere che $W = \frac{1}{2}Z$ e ottenere $\varphi_\varepsilon(\frac{1}{4}) = e^{\frac{1}{4}X}$. Andando avanti otteniamo

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2^k}\right) = e^{\frac{1}{2^k}X} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Sia $t \in [0,1[$, consid. la sua scrittura in base 2:

$$t = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k + \dots$$

con $a_k \in \{0,1\}$. Allora

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon\left(\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k\right)\right) =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}a_1\right) \cdot \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{4}a_2\right) \cdot \dots \cdot \varphi_\varepsilon\left(\frac{1}{2^k}a_k\right)\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{2}a_1X} \cdot e^{\frac{1}{4}a_2X} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{2^k}a_kX}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k\right)X} =$$

$$= e^{\left(\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}a_1 + \dots + \frac{1}{2^k}a_k\right)X} = e^{tX}$$

Inoltre $\varphi_\varepsilon(-t) = \varphi_\varepsilon(t)^{-1} = \left(e^{tX}\right)^{-1} = e^{(-t)X} \quad \forall t \in [0,1[$

Infine, dato $t \in \mathbb{R}$, scelgo $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m > |t|$, e abbiamo

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{t}{m}\right)^m = \left(e^{\frac{t}{m}X}\right)^m = e^{tX}$$

cioè φ_ε è il sottogr. a un parametro associato ad X.

Poniamo $A = \frac{1}{\varepsilon}X$, e allora

$$\varphi(t) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = e^{\frac{t}{\varepsilon}X} = e^{tA} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

<u>Esempio</u>: Alcuni sottogruppi a un parametro forniscono esempi importanti di sottogruppi di Lie di $GL(n,\mathbb{R})$, cioè sgr che sono var. differenziabili. E' vero che sono tutte applicazioni continue e C^∞ da $\mathbb{R}$ in $GL(n,\mathbb{R})$, ed è vero che in un certo senso abb. dim. nel teorema che C^∞ segue automaticam. dalla continuità.

Però non tutti i sottogruppi a un parametro di $GL(n,\mathbb{R})$ hanno immagine chiusa. Vediamo esempi in $GL(4,\mathbb{R})$, più precisamente nel sottogruppo

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(2,\mathbb{R}),\ B \in SO(2,\mathbb{R}) \right\} = H$$

Il gruppo $SO(2,\mathbb{R})$ è il gruppo delle rotazioni di $\mathbb{R}^2$, quindi H è identificabile con $S^1 \times S^1$ = toro.

Vediamo $S^1 \times S^1$ come il quoziente $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, cioè consideriamo l'omomorfismo

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1 \subseteq GL(4,\mathbb{R})$$

$$(t,s) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(t) & -\sin(t) & & \\ \sin(t) & \cos(t) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \cos(s) & -\sin(s) \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & \sin(s) & \cos(s) \end{array}\right)$$

è un omomorfismo di gruppi, ed è continuo, quindi è un omomorfismo di gruppi topologici.

D'altronde è facile creare „sottogruppi a un parametro" di $\mathbb{R}^2$, cioè omomorfismi di gruppi topologici $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, ad es. si fissa $v \in \mathbb{R}^2$ e si considera

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto t \cdot v$$

Componendoli con l'omomorfismo di prima otteniamo sottogruppi a un parametro di $H = S^1 \times S^1$.

Se $v = (a,b)$ allora si ottiene il sottogruppo a un parametro

$$t \longmapsto e^{t\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -a & & \\ a & 0 & & \\ \hline & & 0 & -b \\ & & b & 0 \end{array}\right)}$$

(si veda l'esempio precedente)

A seconda di v, l'immagine di questo sgr a un parametro ha proprietà topologiche diverse:

1) se v si può scrivere come $s \cdot w$ con $s \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{Q}^2$ (oppure $w \in \mathbb{Z}^2$, è equivalente) allora l'omomorfismo ha immagine che è un sottogruppo chiuso.

2) Altrimenti, l'omomorfismo ha immagine <u>non chiusa</u>, è densa in $S^1 \times S^1$.

<u>Esercizio</u>: Dimostrare 1) e 2).