TOKEN: 561654

Complementi

Algebra universale inviluppante

Problema: Data un'algebra di Lie L, esiste A algebra associativa tale che $A \supseteq L$?

Teorema (Ado): Se L ha dim. finita, allora esiste A di dimensione finita. Altra formulazione: L è isomorfa a una sottoalg. di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$ per qualche n.

(dim.: difficile)

Se non si richiede A di dim. finita, allora A esiste sempre, grazie al Teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt.

Sia L algebra di Lie qualsiasi, consid. $T(L)$ = algebra tensoriale su L.

E' un'algebra associativa e contiene il sottosp. vett. L, ma L non è una sottoalgebra di Lie, infatti dati $x, y \in L$, il bracket in $T(L)$ è $x \otimes y - y \otimes x$, non appartiene a L (se $x \neq y \neq 0$).

Sia I l'ideale di $T(L)$ generato dagli elem.

$$\underbrace{x \otimes y - y \otimes x}_{\in L \otimes L} - \underbrace{[x, y]}_{\in L} \qquad (\forall x, y \in L)$$

Def: L'algebra universale inviluppante di L è $\mathcal{U}(L) = \frac{T(L)}{I}$.

Vorrei dire: ora L è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{U}(L)$. Però non è ovvio, possiamo dire: l'applicazione naturale $L \longrightarrow \mathcal{U}(L)$ (data da $x \longmapsto [x] \bmod I$) è un omomorfismo di algebre di Lie.

Problema: è iniettiva? Sì, deriva da:

Teorema (PBW): Consid. una base $(x_1, \dots)$ di L ordinata (qualsiasi cardinalità!) allora $\mathcal{U}(L)$ ha base formata dai vettori 1, e prodotti del tipo $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ con $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m$ (qui $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = [x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_m}]$) per qualsiasi $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e qualsiasi scelta di indici.

(senza dim.)

Corollario: L'applicaz. naturale $L \longrightarrow \mathcal{U}(L)$ è iniettiva.

Corollario: Sia $L(x_1, \dots, x_n)$ l'algebra di Lie libera in generatori $x_1, \dots, x_n$, e M un'algebra di Lie. Fissati $y_1, \dots, y_n \in M$, esiste un'unico omom. $\varphi : L(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow M$ tale che $\varphi(x_i) = y_i \; \forall i$.

(Versione più naturale della proprietà universale di $L(x_1, \dots, x_n)$.)

Dim.: Sappiamo che il corollario vale se M è contenuta in un'algebra associativa, e lo è perchè $M \subseteq \mathcal{U}(M)$ a meno di isom..

$\square$

Esempi ed esercizi:

Esercizio: Verificare per $sl(l+1)$, $so(2l+1)$, $sp(2l)$, $so(2l)$ l'ultima prop. della lezione precedente, trovando gli elem. $h_1, \ldots, h_l$.

Ad es.: $sl(l+1)$: $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ ecc...

Esempi di sottoalgebre di Lie di L semisemplice

Sia L semisemplice, le sottoalgebre di Lie proprie massimali si distinguono* in due classi:

(*: non è banale dimostrarlo)

1) Sottoalgebre paraboliche

2) Sottoalgebre semisemplici ($\leftarrow$ sono classificate con liste esplicite per ogni tipo)

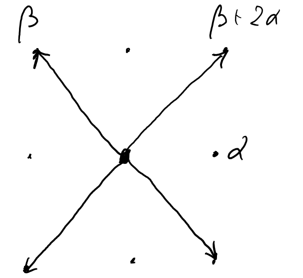
Vediamo le sottoalgebre paraboliche. Si tratta di sottoalgebre di Lie che contengono H. In generale, una sottoalgebra contenente H è del tipo:

$$H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} L_\alpha \qquad \text{dove } \Psi \subseteq \Phi$$

e $\Psi \cup \{0\}$ dev'essere chiuso rispetto alla somma (cioè se $\alpha, \beta \in \Psi \cup \{0\}$ e $\alpha + \beta \in \Phi \cup \{0\}$, allora $\alpha + \beta \in \Psi \cup \{0\}$).

Es.: $\Psi = \{\alpha, -\alpha\}$ $\forall \alpha \in \Phi$ ha questa proprietà, e la sottoalgebra è $H + S_\alpha$.

In C_2:



la sottoalgebra è $H + S_\beta + S_{\beta+2\alpha}$

Un modo di def. Ψ con questa proprietà è scegliere $\gamma \in E \setminus \{0\}$ (non necess. regolare) e porre

$$\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \gamma) \geq 0\}$$

Si ottiene una sottoalgebra detta <u>parabolica</u>:

$$P = \underbrace{H \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \mid (\alpha,\gamma)=0 \\ \alpha \in \Phi}} L_\alpha \right)} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{\substack{\beta \in \Phi \mid \\ (\beta,\gamma)>0}} L_\beta \right)}_{U}$$

è una sottoalgebra.

Anche la somma dei primi due addendi è una sottoalgebra di L,

e anche il terzo addendo (<u>senza</u> H!) è una sottoalgebra U di L e anche di P.

Inoltre U è un <u>ideale</u> di P.

<u>Esercizio</u>: <u>Descrivere</u> P per $\mathfrak{sl}(l+1)$ dove γ è dato in questo modo:

Si sceglie un sottoinsieme $\Delta' \subseteq \Delta$, si ponga $(\gamma, \alpha) = 0$ $\forall \alpha \in \Delta'$,

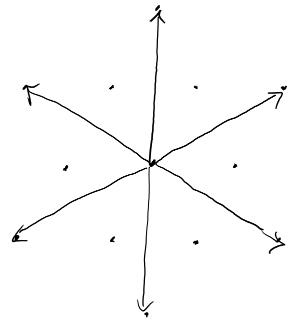
e $(\gamma, \alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta \setminus \Delta'$.

(con questa scelta, $\{\alpha\in\Phi \mid (\alpha,\gamma)=0\} = \{\alpha\in\Phi \mid \alpha$ è comb. lineare di soli elem. di $\Delta'\}$, e $\{\beta\in\Phi \mid (\beta,\gamma)>0\} = \{\beta\in\Phi^+ \mid \beta$ è comb. lineare non di soli elem. di $\Delta'\}$)

(Le sottoalgebre P vengono „a blocchi", descrivere i blocchi in termini di Δ'!)

<u>Riguardo alle sottoalgebre semisemplici</u>

Se M semisemplice ha diagramma di Dynkin contenuto in quello di L semisemplice, allora c'è un omom. iniettivo $M \longrightarrow L$ (manda i gen. di Serre di M in alcuni di quelli di L). Ma non tutte le inclusioni $M\subseteq L$ sono date da sottodiagrammi del diag di Dynkin. Ad es. se L è di tipo G_2:



$\Psi = \{$radici lunghe$\}$

fornisce

$$M = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Psi} L_\alpha$$

una sottoalgebra di tipo A_2 dentro L

ma A_2 non è un sottodiagramma di G_2.

Altri esempi vengono da so e sp, corrisp. alla scelta di un sottosp. $V\subseteq\mathbb{C}^n$ dove la forma è non degenere, e alla decomp. $\mathbb{C}^n = V\oplus V^\perp$. Ottengo:

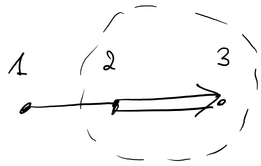
$so(2a)\oplus so(2b) \subseteq so(2(a+b)) = L$ $\quad$ $(2a = \dim V)$

$so(2a+1)\oplus so(2b) \subseteq so(2(a+b)+1) = L$

$sp(2a)\oplus sp(2b) \subseteq sp(2(a+b)) = L$

(sono tutte sottoalg. contenenti H)

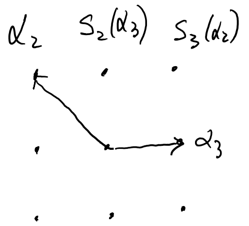
Esercizio: Trovare le radici positive di B_3:



Svolgimento: Sappiamo che $\mathfrak{so}(7)$ è di tipo B_3, e conosciamo le radici di $\mathfrak{so}(7)$, ma ricaviamole usando solo il gruppo di Weyl.

Ricordiamo $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$ con $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$

$\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle = -1$, $\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -1$ (α_1, α_2: stessa lunghezza)



$\langle \alpha_1, \alpha_3^\vee \rangle = 0$, $\langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 0$ ($\alpha_1 \perp \alpha_3$, non c'è il lato)

$\langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle = -2$, $\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -1$ (α_2 = la lunga fra le due, α_3 = la corta)

Radici semplici: $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

Applichiamo le riflessioni semplici:

$$S_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (\text{e } S_2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1)$$

$$S_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \underbrace{S_3(\alpha_1)}_{=\alpha_1} + S_3(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$$

Tutte le possibili sequenze producono:

$$
\begin{tikzcd}
\alpha_1 \arrow[loop left, "s_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "s_2"] & \alpha_2 \arrow[dl, leftrightarrow, "s_1"'] \arrow[d, leftrightarrow, "s_3"] & \alpha_3 \arrow[loop right, "s_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "s_2"] \\
\alpha_1+\alpha_2 \arrow[d, leftrightarrow, "s_3"] & \alpha_2+2\alpha_3 \arrow[loop right, "s_2"] \arrow[dl, leftrightarrow, "s_1"] & \alpha_2+\alpha_3 \arrow[loop right, "s_3"] \arrow[d, leftrightarrow, "s_1"] \\
\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 \arrow[d, leftrightarrow, "s_2"] & & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \arrow[loop left, "s_3"] \arrow[loop right, "s_1"] \\
\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \arrow[loop left, "s_1"] \arrow[loop right, "s_3"] & &
\end{tikzcd}
$$

Il grafico per Φ^- è lo stesso con segni $-$.

Es.: Sia Φ di tipo C_n, $\gamma = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \_ + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$ $(n \geq 3)$

D.m. che γ è una radice, e stabilire se è lunga o corta.

Svolgimento: Trovo $w \in W$ tale che $w(\gamma) \in \Delta$,

$$
\begin{tikzcd}
\underset{1}{\bullet} \arrow[r, dash] & \underset{2}{\bullet} \arrow[r, dash] & \cdots & \underset{n-1}{\bullet} & \underset{n}{\bullet} \arrow[l, Leftarrow]
\end{tikzcd}
$$

scrivendo riflessioni semplici che „abbassano" i coefficienti.

Proviamo con le varie rifless. semplici:

$$s_1(\gamma) = \gamma$$

$$s_2(\gamma) = \ldots = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \_ + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$s_3 s_2(\gamma) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \_ + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$\vdots$$

$$s_{n-2} s_{n-3} \cdots s_2(\gamma) = \alpha_1 + \_ + \alpha_n = \beta$$

Proseguo con:
$$s_1(\beta) = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$
$$s_2 s_1(\beta) = \alpha_3 + \dots + \alpha_n$$
$$\vdots$$
$$s_{n-1} \cdots s_2 s_1(\beta) = \alpha_{n-1}$$

Allora γ è una radice, perché $w(\gamma) \in \Delta$ con

$$s_{n-1} \cdots s_2 s_1 s_{n-2} \cdots s_3 s_2 = w$$

e $w(\gamma) = \alpha_{n-1}$ che è corta, quindi anche γ è corta.

Questo procedimento ha abbassato ogni volta alcuni coefficienti di γ, arrivando a una radice semplice. La cosa funziona sempre, grazie al seguente:

Esercizio: Sia $\beta \in \Phi^+ \setminus \Delta$, dimostrare che esiste $\alpha \in \Delta$ tale che $\beta - \alpha \in \Phi^+$. (Oss.: allora α compariva nell'espr. di β con coeff. $\neq 0$).