TOKEN: 30317

Continuiamo la dim. del teorema di Serre:

Fine passo 8: l'elem. τ_i agisce sull' $sl(2)$-modulo gen. da $v \in L_\lambda$ (v qualsiasi in L_λ), e manda v in $L_{s_i(\lambda)} = L_\mu$.

Verifica di questo fatto, calcoliamo l'$\underline{H}$-autovalore di $\tau_i v$ (tramite ad)

Sappiamo che l'h_j-autovalore di v è $\lambda(h_j)$. Sia $h \in H$, possiamo scrivere $h = a h_i + \tilde{h}$ dove $a \in k$, $\tilde{h} \in \underset{\text{in } H}{\ker(\alpha_i)}$, perché $\ker(\alpha_i)$ ha codim. 1 in H e non contiene h_i.

Ora:

$$[h, \tau_i v] = [a h_i + \tilde{h}_i, \tau_i v]$$

Abb.:

$$[h_i, \tau_i v] = -\lambda(h_i)\tau_i v = (\lambda(h_i) - 2\lambda(h_i))\tau_i v =$$

$$= (\lambda(h_i) - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i(h_i))\tau_i v =$$

$$= \underline{(\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i)}(h_i) \cdot \tau_i v .$$

inoltre

$$[\tilde{h}, \tau_i v] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } \tilde{h} \text{ commuta} \\ \text{con } X_i \text{ e } Y_i}}{=} \tau_i \lambda(\tilde{h}) v = \lambda(\tilde{h}) \tau_i v =$$

$$= (\lambda(\tilde{h}) - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \underbrace{\alpha_i(\tilde{h})}_{=0}) \tau_i v = \underline{(\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i)}(\tilde{h}) \tau_i v$$

Segue $\tau_i v \in L_{\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha} = L_{s_i(\lambda)}$

Visto che v è qualsiasi in L_λ, abb. $\tau_i(L_\lambda) \subseteq L_\mu$

<u>Passo 10</u>: $\dim(L_{\alpha_i}) = 1 \quad \forall i$,

$\dim(L_{r\alpha_i}) = 0 \qquad$ se $\quad r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$

<u>Dim.</u>: In L_0, gli $ad(H)$-autosp. di autovalore $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ hanno dim. 1, inoltre vengono mandati iniettivamente in L, quindi $\dim(L_{\alpha_i}) = 1 \quad \forall i$.

In L_0 un $ad(H)$-autospazio di autovalore $r\alpha_i$ (supp. $r > 0$) può essere ottenuto solo con un bracket del tipo

$$\underbrace{[x_i, [x_i, \ldots, [x_i, x_i]}_{r \text{ volte}} \cdots]]$$

che è $= 0$, quindi anche in L vale $L_{r\alpha_i} = \{0\}$.

<u>Passo 11</u>: Data $\alpha \in \Phi$, allora $\dim(L_\alpha) = 1$, e $\dim(L_{r\alpha}) = 0$ se $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$

<u>Dim.</u>: Esiste $w \in W$ tale che $w(\alpha) \in \Delta$, e quindi il passo 11 segue dal passo 9 $\left(\dim(L_\alpha) = \dim(L_{w(\alpha)}) \right)$ e dal passo 10.

<u>Passo 12</u>: Se $L_\lambda \neq \{0\}$ e $\lambda \neq 0$ allora $\lambda \in \Phi$.

Dim.: λ è comb. lin. a coeff. tutti ≥ 0 o tutti ≤ 0 di elem. di Δ.

Se $\lambda \notin \Phi$, allora non è neppure su alcuna retta generata da una radice (per il passo 11).

Segue (esercizio): esiste $w \in W$ tale che $w(\lambda)$ è comb. lineare di elem. di Δ con alcuni coeff. >0, alcuni coeff. <0

(sugg.: sappiamo che nella W-orbita di λ c'è un elem. della chiusura della camera fondamentale).

Quindi $L_{w(\lambda)} \neq \{0\}$, ma allora anche $w(\lambda)$ dovrebbe essere comb. lin. degli elem. di Δ a coeff. tutti ≥ 0, oppure tutti ≤ 0: assurdo.

Passo 13: $\dim(L) = \underset{\dim(H)}{\underset{\parallel}{l}} + |\Phi|$ quindi L ha dim. finita.

Dim.: Segue dai passi 5, 11, 12.

Passo 14: L è semisemplice.

Dim.: Supp. L non sia semisemplice, cioè $\mathrm{Rad}(L) \neq \{0\}$, allora l'ultimo termine non nullo della serie derivata di L è un ideale abeliano $I^{\neq\{0\}}$ di L.

$ad(H)$ è diagonalizzabile su L ($\boxed{L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha}$ è la decomp. in autospazi) e I è stabile per $ad(H)$, quindi $ad(H)$ è diagonalizzabile anche su I, cioè $I = \underline{(H \cap I)} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \underline{(L_\alpha \cap I)}$.

Se $I \cap L_\alpha$ ha dim 1, allora prendo $x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha$ soliti)

$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ deve essere in I, ma x_α e h_α non commutano: assurdo perché I è abeliano.

Segue $I \subseteq H$, se $I \neq \{0\}$ prendo $\alpha_i \in \Delta$ non nulla su un elem. $h \in I$, e $[h, x_i] = \underbrace{\alpha_i(h)}_{\neq 0} x_i \neq 0$, allora $x_i \in I$, ma x_i non commuta con H: assurdo.

<u>Passo 15</u>: H è torale massimale e Φ è isomorfo al sist. di radici di L rispetto a H.

<u>Dim.</u>: La decomposizione $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ implica che H è abeliana massimale, e quindi è torale massimale.

Calcoliamo il sist. di radici di L risp. a H: si scelgono elem. $x_\alpha \in L_\alpha$ per ogni $\alpha \in \Phi$, in ciascun L_{α_i} scelgo x_i.

A quel punto gli elem. h_α, y_α ($\in S_\alpha$) sono univocam. det., e ottengo h_i per $\alpha_i \in \Delta$, e la matrice di Cartan allora è data da $\alpha_i(h_j)$, che è la stessa di Φ di partenza.

$\square$

<u>Corollario</u>: Se L_1, L_2 sono algebre di Lie semisemplici, con sistemi di radici isomorfi (per qualche scelta di sottoalgebre torali massimali), allora $L_1 \cong L_2$.

Dim.: Sia L ottenuta col teo. di Serre dal sistema di radici.

L_i ha elementi $x_1^{(i)}, \dots, x_l^{(i)}, h_1^{(i)}, \dots, h_l^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_l^{(i)}$

($l = |\underset{\nwarrow \text{base}}{\Delta}|$) che soddisfano le relazioni di Serre.

Inoltre $ad_{L_i} : L_i \to gl(L_i)$ è iniettiva, per cui L_i a meno di isomorfismi è contenuta in un'algebra associativa. Quindi per la proprietà universale esistono omom. di algebre di Lie

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd}$$

Sono iniettivi, perché il nucleo di uno di essi dovrebbe essere una somma di addendi semplici di L (questi addendi corrisp. alle comp. connesse del diagr. di Dynkin), ma nessuna va in 0 perché i gen. $x_1^{(i)} \dots$ sono nonnulli. Inoltre questi generano, quindi

$L_1 \cong L \cong L_2$.

$\square$

Quello che manca nella classificazione a questo punto è escludere che algebre di Lie semisemplici con diversi diagr. di Dynkin possano essere isomorfe. Per questo si usa:

Teorema: Siano $H, H' \subseteq L$ sottoalg. torali massimali di L semisemplice, allora $\exists \varphi : L \to L$ automorfismo tale che $\varphi(H) = H'$.

(senza dim.)

<u>Corollario:</u> Φ non dipende dalla scelta di H in L.

<u>Esempi di algebre di tipo A_n, B_n, C_n, D_n</u>

<u>Lemma:</u> Sia $\Phi \subseteq E$ sistema di radici irriducibile. Allora il prodotto scalare $(-,-)$ in E (per cui Φ è un sistema di radici) è univocam. determinato a meno di multipli scalari.

<u>Dim.:</u> Scegliamo una base $\Delta \subseteq \Phi$ (è indip. da $(-,-)$).

Siano $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \neq \beta$. Se α e β non sono ortogonali, consid. $E' = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha, \beta\}$, e $\Phi \cap E'$.

Consid. i tre casi sul piano: A_2, C_2, G_2, quali radici sono in $\Phi \cap E'$ dice se α, β sono lunghe uguali, qual è l'angolo fra esse, e il rapporto fra le lunghezze.

Basta riscalare un prodotto scalare rendendo α con la stessa lunghezza rispetto ai due prod. scalari, e allora (α, α), (α, β), (β, β) sono gli stessi per entrambi i prodotti scalari.

Per concludere basta osservare che il diagr. di Dynkin è connesso, quindi parto da $\alpha \in \Delta$ qualsiasi, riscalo in modo che le due lunghezze di α siano uguali, e procedendo con radici semplici una adiacente all'altra ottengo che i prod. scalari sono uguali.

$\square$

Oss.: Se Φ non è irriducibile, allora l'unica differenza possibile fra prodotti scalari che lo rendono un sist. di radici è un riscalaggio su ciascuna componente irriducibile. Quindi se $\Phi \subseteq E$ è un sist. di radici per due prodotti scalari su E, cioè formalmente sono due sist. di radici, allora sono isomorfi.

Esempio: Quindi i prodotti scalari che abb. dato per calcolare i sist. di radici di $\mathfrak{sl}(n+1)$ (di tipo A_n), $\mathfrak{so}(2n+1)$ (B_n), $\mathfrak{sp}(2n)$ (C_n) e $\mathfrak{so}(2n)$ (D_n) sono multipli scalari della forma di Killing.

Proposizione: Sia L algebra di Lie di dim. finita, $H \subseteq L$ abeliana

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha \qquad (L_\alpha = \mathrm{ad}(H) \text{ autospazio})$$

con:

1) $\dim(L_\alpha) = 1$ opp. 0 $\quad \forall \alpha \neq 0$

sia $\Phi = \{\alpha \in H^* \setminus \{0\} \mid L_\alpha \neq \{0\}\}$

2) Sia $E_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) (\subseteq H^*)$, $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$, $\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{k}(H)$

Supp esista un prodotto scalare su E che rende Φ un sist. di radici.

3) Scelta una base $\Delta \subseteq \Phi$, $\Delta = \{\alpha_1, .., \alpha_\ell\}$, supp. esistano $h_1, .., h_\ell \in H$, tali che $\alpha_i(h_j) = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \quad \forall i, j$

e tali che $h_i \in [L_{\alpha_i}, L_{-\alpha_i}]$ $\forall i$.

Allora L è semisemplice, H è torale massimale, con sist. di radici Φ.

<u>Dim.:</u> Scelgo elem. $x_1, \dots, x_\ell \in L$, $y_1, \dots, y_\ell \in L$ con $\underline{x_i \in L_{\alpha_i}}$, $\underline{y_i \in L_{-\alpha_i}}$, $\underbrace{[x_i, y_i] = h_i}$.

A questo punto gli elem. $x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ soddisfano le relaz. di Serre, perché $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.

facile, usa solo Jacobi

Allora esiste un omom. $\varphi: M \longrightarrow L$ dove M è semisemplice di sist. di radici Φ. φ è suriettiva, perché nella sua immagine c'è H e tutti gli L_α, poi nessun addendo semplice di M va in zero (perché la m. di Cartan è invertibile, Δ è una base, e segue: $h_1, \dots, h_\ell$ sono lin. indipendenti, e allora x_i, y_i sono non nulli), cioè φ è un isom. che manda una sottoalg. torale max. di M su H.

$\square$