TOKEN : 38376

Per la dim. del teorema di Serre:

dato $x \in L =$ algebra di Lie, è def. $\exp(ad(x)) \in GL(L)$ se:

1) L ha dim. finita,

2) x è ad-nilpotente, allora $\exp(ad(x)) = \sum_{t=0}^{m} \frac{ad(x)^t}{t!}$ tale che $ad(x)^m = 0$ come elem. di $End(L)$

3) $ad(x): L \to L$ è localmente nilpotente, cioè

$\forall y \in L$: $ad(x)^m(y) = 0$ per m abb. grande.

Anche in questo caso $\exp(ad(x))$ è ben definito, ponendo

$$\exp(ad(x))(y) = \sum_{t=0}^{m} \frac{ad(x)^t}{t!}(y)$$ (qui m è tale che $ad(x)^m(y) = 0$)

Esercizio: Verificare che $\exp(ad(x))$ è un automorfismo di L come algebra di Lie, anche nei casi 2 e 3.

Esempio: Consid. $L = sl(2)$, $H = sl(2) \cap h(2)$, sist. di radici $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

una sola riflessione semplice s_α che scambia α con $-\alpha$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2)$ normalizza H, e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

in un certo senso quindi coniugare con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ „realizza" la riflessione semplice s_α (a meno dell'identificazione che abb. fatto:

$\alpha \in \Phi \subseteq E$ = spazio vett. reale
$\parallel$
$\alpha \in H^*$)

Vogliamo usare $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nella dim., in cui $sl(2)$ è <u>dentro</u> un'algebra di dim. anche infinita. Allora realizziamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ come prodotto di esponenziali:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \exp(e)\exp(-f)\exp(e) \qquad ((e,h,f) = \text{base solita di } sl(2))$$

$sl(2)$ agirà con la rappr aggiunta sull'algebra grande, quindi intanto consid. $sl(2)$ che agisce su un modulo V di dim. finita.

V è somma diretta di $sl(2)$-moduli irriducibili, che sono del tipo $k[X,Y]_d$ = {pol. omogenei di grado d}, e queste rappres. sono i diff. delle rappr. $k[X,Y]_d$ di $SL(2)$. Cioè V „si integra" a una rappr. di $SL(2)$.

Se $\varphi : sl(2) \to gl(V)$ è la rappr., l'elem. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2)$ viene mandato in $\exp(\varphi(e))\exp(-\varphi(f))\exp(\varphi(e)) = \tau$

e abb. $\boxed{\tau\,\varphi(h)\,\tau^{-1} = -\varphi(h)}$.

Si vede facilmente: τ manda un autovettore di $\varphi(h)$ di autovalore λ in un autovettore di autovalore $-\lambda$.

Dim. teorema di Serre

Ric.: abb. definito L_0 = quoziente di $\hat{L}$ per le relaz. $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, avevamo def. gli elem x_{ij}, y_{ij} $(i \neq j)$ in L_0, che realizzano le altre relazioni $(S^+_{i,j})$, $(S^-_{i,j})$.

Def. K = ideale di L_0 generato da x_{ij} e y_{ij} $\forall i \neq j$, $L = \frac{L_0}{K}$.

Ric.: $L_0 = X \oplus H \oplus Y$

Def. I = ideale di X generato da $x_{i,j}$ $\forall i \neq j$

J = ideale di Y generato da $y_{i,j}$ $\forall i \neq j$

Passo 1: I è anche un ideale di L_0 e J è anche un ideale di L_0.

Dim.: Vediamo la dim. per J, quella per I è analoga.

Bracket di elem. di Y con J: sono in J perché J è ideale di Y.

— , ——— H con J: l'elem. y_{ij} è $ad(h_s)$-autovettore, di autovalore $-c_{js} + (c_{ji} - 1)c_{is}$, e $ad(H)(Y) \subseteq Y$ (abbiamo dato una base di Y fatta di autovettori di $ad(H)$).

D'altronde J è span di bracket fra gli elem. y_{ij} e gli elem. di Y, quindi (per Jacobi) anche J ha una base di $ad(H)$-autovettori.

Segue: $ad(H)(J) \subseteq J$.

Infine, i generatori $x_1, .., x_e$ di X (come algebra di Lie) soddisfano

$ad(X_s)(Y_{i,j})=0$, da questo segue $[X, J]=0$ (usando Jacobi).

Segue: J (e anche I) è ideale di L_0.

<u>Passo 2</u>: $K = I + J$

<u>Dim.</u>: Abbiamo: $I \subseteq K$, $J \subseteq K$, e $I+J$ allora è un ideale di L_0 che contiene x_{ij}, y_{ij} $\forall i \neq j$. E' contenuto in K, quindi coincide con K.

<u>Passo 3</u>: $L = N^- \oplus H \oplus N$ (somma diretta di sottosp. vettoriali)

dove $N^- = \dfrac{Y}{J}$, $N = X/I$.

<u>Dim.</u>:

$$L = \frac{Y \oplus H \oplus X}{\underbrace{J \oplus \{0\} \oplus I}_{=K}} = \frac{Y}{J} \oplus \underbrace{\frac{H}{\{0\}}}_{\substack{\parallel \\ H}} \oplus \frac{X}{I}$$

H, cioè H va isomorficamente dentro L, lo identifichiamo con la sua immagine.

<u>Passo 4</u>: $\left(\bigoplus_i k x_i\right) \oplus \left(\bigoplus_i k h_i\right) \oplus \left(\bigoplus_i k y_i\right) \subseteq L_0$ va iniettivamente in L.

(denotiamo con x_i, h_i, y_i anche le loro classi in L).

<u>Dim.</u>: come in L_0.

<u>Passo 5</u>: Def. $L_\lambda = \{x \in L \mid [h, x] = \lambda(h) x \ \forall h \in H\}$ dove $\lambda \in H^*$.

Allora $L_\lambda = H$ se λ = funzionale nullo,

$$N = \sum_{\lambda > 0} L_\lambda \quad , \quad N = \sum_{\lambda < 0} L_\lambda \quad , \quad \text{ogni } L_\lambda \text{ ha dim. finita.}$$

dove $\lambda > 0$ significa: λ è comb. lin. di $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ a coeff. ≥ 0, non tutti nulli ($\lambda < 0$ analogo con „≤ 0").

__Dim.:__ Segue dal passo 3 e 4, e dalla decomposizione di X e di Y in $ad(H)$-autospazi. Ogni L_λ ha dim. finita perché gli autovettori (visti in X) di autovalore $\lambda = n_1 \alpha_1 + \dots + n_\ell \alpha_\ell$ sono bracket del tipo

$$[x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots, [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}] \dots]] \quad \text{dove } i_j = 1 \text{ per } n_1 \text{ valori di } j,$$

$= 2$ per n_2 valori di j, eccetera. Sono un numero finito di autovettori.

__Passo 6:__ $ad(x_i)$, $ad(y_i)$ $\forall i$ sono localmente nilpotenti ($\in End(L)$).

__Dim.:__ Vediamo x_i, per y_i è analogo.

Sappiamo che potenze abbastanza alte di $ad(x_i)$ mandano a 0 gli elem. $x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell$

sono le relaz. x_{ij}

$[h_j, ad(x_i)] =$ multiplo di x_i

$[x_i, y_j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ h_i & \text{se } i = j \end{cases}$, con altre 2 volte va in zero

Sia ora $M \subseteq L$ il sottosp. vettoriale dei vettori dove $ad(x_i)$ (con i fissato) agisce in modo localm. nilpotente.

Ora, se $z, z' \in M$ e $ad(x_i)^m(z) = 0$, $ad(x_i)^{m'}(z') = 0$, allora $\quad ad(x_i)^{m+m'}([z,z'])=0$

(deriva dall'uguaglianza già vista $(D-(\alpha+\beta))^m([a,b]) =$

$\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} [(D-\alpha)^j(a), (D-\beta)^{m-j}(b)]$, qui D è una derivazione,

a e b sono elem. di un'algebra di Lie, α, β = scalari,

prendo $D = ad(x_i)$, $\alpha=\beta=0$, $a=z$, $b=z'$).

Deduciamo che M è una sottoalgebra di Lie di L contenente i generatori, quindi $M=L$.

<u>Passo 7</u>: Sono ben definiti gli elem. $\tau_i = \exp(ad(x_i))\exp(-ad(y_i))\exp(ad(x_i))$ e sono automorfismi di L.

<u>Dim.</u>: Segue dal passo 6.

<u>Passo 8</u>: Data $\alpha \in \Delta$, definiamo $s_\alpha : H^* \longrightarrow H^*$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \Delta}}{\beta} \longmapsto \beta - \underbrace{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}\alpha$$

quelli del sist. di radici Φ

e chiamiamo W il gruppo generato dagli s_α $(W \subseteq GL(H^*))$.

Allora possiamo identificare questi s_α con le riflessioni $E \to E$ del gruppo di Weyl di Φ, e tutto questo W con il gruppo di Weyl di Φ.

<u>Dim.</u>: Identifichiamo ogni radice $\alpha_i \in \Delta$ con l'elem. di H^* che vale $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$ su h_j,

questo ci permette di identificare $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\, \Phi\ (\subseteq E)$ con un sottospazio $/\mathbb{Q}$ di H^*, che ha la stessa dimensione su $\mathbb{Q}$ di E su $\mathbb{R}$ e anche di H^* su k.

Le "riflessioni" S_α definite su H^* coincidono con le restrizioni delle riflessioni di E a $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\, \Phi$.

Passo 9: Siano $\lambda, \mu \in H^*$. Se esiste $w \in W$ tale che $w(\lambda) = \mu$, allora

$$\dim (L_\lambda) = \dim (L_\mu).$$

Dim.: Possiamo supporre $w = S_i$ = rifless. semplice ass. a $\alpha_i \in \Delta$. Usiamo τ_i.
Studiamo cosa fa τ_i a spazi del tipo $L_{\lambda + r\alpha_i}$. Vediamo come agiscono $ad(x_i)$ e $ad(y_i)$:

$$ad(x_i)(L_{\lambda + r\alpha_i}) \subseteq L_{\lambda + (r+1)\alpha_i}$$

$$ad(y_i)(L_{\lambda + r\alpha_i}) \subseteq L_{\lambda + (r-1)\alpha_i}$$

Concludiamo:

$$\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} L_{\lambda + r\alpha_i} \quad \text{è stabile per } ad(x_i),\ ad(y_i),$$

quindi le loro potenze, quindi τ_i. Inoltre $ad(x_i)$, $ad(y_i)$ agiscono in modo localmente nilpotente, allora fissiamo $v \in L_\lambda$ e consid. $k x_i \oplus k h_i \oplus k y_i \cong \mathfrak{sl}(2)$ che agisce tramite ad su L.
L'$\mathfrak{sl}(2)$-modulo generato da v ha dimensione finita, e τ_i agisce su questo $\mathfrak{sl}(2)$-modulo, e manda v dentro $L_{S_i(\lambda)} = L_\mu$ (prossima volta: verifica di questo fatto).

Esercizi foglio 9

Es. 1: (1) Esiste $w_0 \in W$ unico tale che $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$.

Dim.: Se $\gamma \in C$ camera fondamentale, cioè $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, allora

$$\Phi^- = \Phi^+(-\gamma), \quad \Phi^+ = \Phi^-(-\gamma), \quad e \quad \gamma \in -C.$$

Esiste un unico elem. $w_0 \in W$ tale che $w_0(C) = -C$.

Segue $w_0(\Phi^+(\gamma)) = \Phi^-$, e w_0 è l'unico che soddisfa $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$.

(2) $w_0^2 = Id$

Dim.: $w_0^2(C) = C$ quindi $w_0^2 = Id$.

(3) Ogni espressione ridotta di w_0 contiene ogni riflessione semplice almeno una volta.

Dim.: Oss. che $s_\alpha(\beta) \in \beta + \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha\}$.

Supp. che w_0 abbia una scrittura ridotta in cui non compare $\alpha \in \Delta$, allora $w_0(\alpha) = \alpha + \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Delta \setminus \{\alpha\})$. Questo dovrebbe essere comb. lin. a coeff. ≤ 0 di radici semplici, ed è impossibile.

(4) Sia $w \in W$ qualsiasi, $w = s_1 \cdots s_{\ell(w)}$ scrittura ridotta, allora esiste una scrittura ridotta di w_0 che comincia con quella di w.

Dim.: Vogliamo considerare $w^{-1}w_0$ = il resto della scrittura ridotta di w_0 (a posteriori, se esiste). Più in generale, supponiamo di avere

$w_0 = a \cdot b$

Allora dimostriamo che $\ell(w_0) = \ell(a) + \ell(b)$ (attenzione: dati due elem. qualsiasi $x, y \in W$, non è vero che $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$, es. $x = y =$ riflessione semplice).

Consideriamo le radici positive che cambiano segno facendo b: sono $\ell(b)$, e nessuna di esse ricambia segno facendo anche a dopo b. Invece le radici positive che non cambiano segno facendo b, poi facendo anche a devono cambiare segno. Cioè:

$$\{\alpha \in \Phi^+ \mid a(\alpha) < 0\} = b(\{\beta \in \Phi^+ \mid b(\beta) > 0\}).$$

Segue: $n(a) = |\Phi^+| - n(b)$, cioè $\ell(w_0) = \ell(a) + \ell(b)$

↑ notazione vista a lezione

Torniamo a $w \in W$ qualsiasi, scriviamo $w = s_1 \cdots s_{\ell(w)}$, allora $w^{-1}w_0$ ha scrittura ridotta del tipo $s_{\ell(w)+1} \cdots s_{\ell(w_0)}$, allora

$$w_0 = w \cdot (w^{-1}w_0) = s_1 \cdots s_{\ell(w)} \cdot s_{\ell(w)+1} \cdots s_{\ell(w)}$$

(5)

	$A_1 \times A_1$,	A_2,	C_2,	G_2
$\lvert\Phi^+\rvert$	2	3	4	6

Visto che abbiamo solo due riflessioni semplici, ogni scrittura ridotta è del tipo $s_1 s_2 s_1 s_2 \cdots$ opp $s_2 s_1 s_2 \cdots$. Basta scrivere un'espressione così, con tanti fattori quant'è $|\Phi^+|$. Una di queste due fornisce w_0, si verifica che entrambe forniscono w_0. Quindi:

A_2 : $w_0 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ $\qquad$ $A_1 \times A_1$: $w_0 = s_1 s_2$

C_2 : $w_0 = s_1 s_2 s_1 s_2$

G_2 : $w_0 = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2$

Es. 2: Sia $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ espressione non nec. ridotta, allora t ha la stessa parità di $\ell(w)$.

Dim.: Scriviamo $w = r_1 \cdot \ldots \cdot r_{\ell(w)}$ dove $r_1, \ldots, r_{\ell(w)}$ sono riflessioni semplici, allora

$$\underbrace{s_1 \cdot \ldots \cdot s_t}_{= w} \underbrace{r_{\ell(w)} \cdot \ldots \cdot r_1}_{= w^{-1}} = Id$$

Applichiamo il lemma di cancellazione visto a lezione con la radice semplice di r_1: viene mandata in Φ^+ da Id.

Segue che scrivo Id come un prodotto di due prodotti, e i nuovi due numeri di fattori hanno stessa parità se e solo se hanno stessa parità t e $\ell(w)$. Posso procedere così fino ad avere un prodotto di due prodotti ciascuno con nessun fattore, e allora t e $\ell(w)$ hanno la stessa parità.

Es. 6: $w = s_1 \cdots s_t$ scrittura ridotta, $t = \ell(w)$.

(1) $s_1 \cdots s_i$ è scrittura ridotta $\forall i$, e $s_i \cdots s_t$

(2) $\beta_t = \alpha_t$

$\beta_{t-1} = s_t(\alpha_{t-1})$

$\vdots$

$\beta_1 = (s_t \cdots s_2)(\alpha_1)$

sono le radici positive che cambiano segno facendo w.

Dim.: (1) $w = \underbrace{s_1 \cdots s_i}\cdot \overbrace{s_i \cdot s_{i+1} \cdots s_t}$

sono scritture ridotte, perché se le accorcio (mantenendo lo stesso elemento) allora accorcio anche w.

(2) Per induzione: se $t=1$ lo sappiamo già.

Passo induttivo: facendo $ws_t = s_1 \cdots s_{t-1}$ cambiano segno le seguenti radici positive:

$$\begin{cases} \tilde\beta_{t-1} = \alpha_{t-1} \\ \tilde\beta_{t-2} = s_{t-1}(\alpha_{t-2}) \\ \vdots \\ \tilde\beta_1 = (s_{t-1}\, s_{t-2} \cdots s_2)(\alpha_1) \end{cases}$$

(Sono $t-1$ quindi sono sono tutte distinte)

Inoltre α_t non è fra di esse, perché $s_t(\alpha_t) = -\alpha_t$, e

$w(-\alpha_t) = -w(\alpha_t) > 0$. Quindi $(ws_t)(\alpha_t) > 0$.

Allora: $\quad s_t(\tilde{\beta}_j) > 0 \quad$ (perché $\overset{>0}{\alpha_t}$ è l'unica che cambia segno facendo s_t)

e $\quad w\boxed{s_t(\tilde{\beta}_j)} < 0$

Segue: $s_t(\tilde{\beta}_1), \dots, s_t(\tilde{\beta}_{t-1})$ sono $t-1$ radici $\overset{>0}{\vee}$ che cambiano segno facendo w, e sono rispettivam. $\beta_1, \dots, \beta_{t-1}$. L'ultima è $\alpha_t = \beta_t$.

<u>Es. 8</u>: $L = \mathfrak{sl}(n+1)$, $\quad H = L \cap \mathfrak{h}(n+1)$, $\quad \Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}$

(1) Calcolare $\omega_1, \dots, \omega_n$

Abb.: $\quad (\alpha, \alpha) = 2 \quad \forall \alpha \in \Phi$

$$(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = \frac{4}{(\alpha,\alpha)} = (\alpha, \alpha)$$

(qui identifichiamo E e E^* tramite il prodotto scalare, e trasferiamo il prodotto scalare su E^*)

cioè $\alpha^\vee = \alpha$ con l'identif. $E = E^*$.

Possiamo scrivere $\quad \omega_1 = \varepsilon_1, \quad \omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \quad \omega_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$

(sottointeso: funzionali su H, ad es. $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} = 0$ su H)

(2) $V = \mathfrak{sl}(n+1)$-modulo con $\mathfrak{b} = \mathfrak{sl}(n+1) \cap \mathfrak{b}(n+1)$ - autovettore simultaneo, autovalore (rispetto a H): ε_1

Basta prendere $\mathbb{C}^{n+1}$ con l'azione usuale ($\mathfrak{sl}(n+1) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n+1)$ l'inclusione). Autovettore comune agli elem. di $\mathfrak{b}$: $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$;

autovalore ε_1.

Altra domanda: trovare $\tilde{V}$ con ω_n invece che ω_1.

Proviamo con V^*: rispetto alla base duale $(\eta_1, \ldots, \eta_{n+1})$ della base canonica $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ di $\mathbb{C}^{n+1} = V$, un elem. $X \in \mathfrak{sl}(n+1)$ agisce su V^* con la matrice $-{}^tX$ (già visto).

Autovettore comune, per ogni $X \in \mathfrak{b}$: η_{n+1}, con autovalore $-\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = \omega_n$

(3) Vogliamo $\overline{V}$ con $\mathfrak{b}$-autovettore di autovalore ω_2. Idea: usiamo il prodotto tensoriale. Ad es. $V \otimes V$, ric.:

$$X.(v \otimes w) = (X.v) \otimes w + v \otimes (X.w)$$

Allora $e_1 \otimes e_1$ è un $\mathfrak{b}$-autovettore, di autovalore: $2\varepsilon_1$.

Voglio $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, provo a usare $e_1 \otimes e_2$, l'autovalore andrebbe bene (se stessi agendo solo con H), e anche $e_2 \otimes e_1$.

Si trova che: $e_1 \otimes e_2$, $e_2 \otimes e_1$ non sono $\mathfrak{b}$-autovettori ma $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ sì, ed è un $\mathfrak{b}$-autovettore di autovalore $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \omega_2$.

Per trovare il modulo irriducibile, osservo che $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ è antisimmetrico, cioè scambiando i fattori di ogni addendo cambia segno.

Proposta: $\overline{V} = \{$ vettori antisimmetrici di $V \otimes V\}$

1) $\overline{V}$ è un $sl(n+1)$-sottomodulo.

Infatti ricordiamo che $V = \mathbb{C}^{n+1}$ è anche un $SL(n+1)$-modulo con l'azione naturale, e la rappr. di $sl(n+1)$ è il diff. di quella di $SL(n+1)$. Segue: la rappr. di $sl(n+1)$ su $V \otimes V$ è il differenziale della rappr. di $SL(n+1)$ su $V \otimes V$:

$$g \cdot (v \otimes w) = (gv) \otimes (gw) \qquad \forall g \in SL(n+1), \ \forall v, w \in V$$

Qui è ovvio che $\overline{V}$ è un $SL(n+1)$-sottomodulo di $V \otimes V$, perché ogni vettore dei fattori di $v \in \overline{V}$ viene moltiplicato per la stessa matrice g. Allora $\overline{V}$ è anche un $sl(n+1)$-sottomodulo.

2) Va verificato che $\overline{V}$ è un $sl(n+1)$-modulo irriducibile, equivalentemente un $SL(n+1)$-modulo irriducibile: <u>esercizio</u>

(suggerimento: dim. che ogni sottomodulo non nullo contiene $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$)