TOKEN: 141047

Prossima settimana: martedì facciamo 2 lezioni: 9-11 aula Picone

esercizi → [11-13 aula Picone oppure E

Ricevimento: la prossima settimana solo venerdì (in presenza + online), dopo la fine del corso prosegue settimanalmente, solo online (giorno da definire).

Continuiamo la teoria verso la dim. del teorema di Serre.

Abb. visto: Φ = sist. di radici

Δ = base = $\{\alpha_1, .., \alpha_\ell\}$

$\hat{L}$ = algebra di Lie libera su generatori $\hat{x}_1, .., \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, .., \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, ..$
$.., \hat{y}_\ell$

$\hat{K}$ = ideale di $\hat{L}$ generato da (S1), (S2), (S3).

$L_0 = \frac{\hat{L}}{\hat{K}}$, $\quad x_i = \hat{x}_i + \hat{K}$, $h_i = \hat{h}_i + \hat{K}$, $y_i = \hat{y}_i + \hat{K}$.

Abbiamo definito una rappresentaz. $\hat{L} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathfrak{gl}(V)$ su $V = T(W)$

dove $W = k v_1 \oplus \dots \oplus k v_\ell$ $\quad$ (notazione: $v_i \otimes v_j = v_i v_j$).

Abb. definito $\hat{\varphi}$ scegliendo gli endomorfismi $\hat{\varphi}(\hat{x}_i)$, $\hat{\varphi}(h_i)$, $\hat{\varphi}(y_i)$, questo definisce un omom. di algebre associative

$$T\left(k\hat{x}_1 \oplus \dots \oplus k\hat{y}_\ell\right) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

per la proprietà universale dell'algebra tensoriale. Questo omom. si restringe a un omom. di algebre di Lie $\hat{L} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathfrak{gl}(V)$.

<u>Proposizione:</u> La rappr. $\hat{\varphi} : \hat{L} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ passa al quoziente

$$\varphi : L_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

<u>Dim.:</u> Oss. che $\hat{h}_i$ agisce diagonalmente sulla base "solita" di $V = T(W)$ cioè la base data dai vettori $v_{i_1} \cdots v_{i_t}$ con $i_1, \dots, i_t \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Quindi $\hat{\varphi}(h_i)$ e $\hat{\varphi}(h_j)$ commutano $\forall i, j$, cioè vale (S1).

Calcoliamo $[\hat{\varphi}(x_i), \underbrace{\hat{\varphi}(y_j)}_{\hat{y}_j}]$ sui vettori di questa base:

($\hat{y}_j$ è fare il prodotto tensoriale a sinistra con v_j)

$$\underbrace{\hat{x}_i \hat{y}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}}_{v_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}} - \hat{y}_j \hat{x}_i v_{i_1} \cdots v_{i_t} = v_j \left(\cancel{\hat{x}_i \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}}\right) - \delta_{j,i} \left(c_{i_1, i} + \dots + c_{i_t, i}\right) \cdot$$

$$v_{i_1} \cdots v_{i_t} - v_j \cdot \left(\cancel{\hat{x}_i \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}}\right) =$$

$$= \delta_{ji} \hat{h}_i v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

vale per $t \geq 1$ (cioè se ho vettori $v_{i_1} \cdots v_{i_t}$), inoltre

$$(\hat{x}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \underbrace{\hat{x}_i) . 1} = \underbrace{\hat{x}_i \hat{v}_j}_{\overset{\shortparallel}{0}} - 0 = 0 = \hat{h}_i . 1$$

Cioè vale (S2).

Vediamo (S3) per le y:

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i).1 = \hat{h}_i v_j = -c_{ji} v_j = (-c_{ji} \hat{y}_j).1$$

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \underset{\nwarrow}{\hat{h}_i}).\underbrace{v_{i_1} \cdots v_{i_t}} = \ldots = -c_{ji} v_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = (-c_{ji} y_j) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

quindi (S3) per le y vale.

Vediamo (S3) per le x:

usiamo un'osservazione: $\hat{h}_i \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = -(c_{i_1,i} + \ldots + c_{i_t,i} - c_{ji}) \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$

dim.: esercizio, per induzione

Da questo segue:

$$(\underbrace{\hat{h}_i \hat{x}_j} - \hat{x}_j \hat{h}_i).1 = 0$$

$$(\text{---}, \text{———}).v_{i_1} \cdots v_{i_t} = \big(-(c_{i_1,i} + \ldots + c_{i_t,i} - c_{ji}) + (c_{i_1,i} + \ldots + c_{i_t,i})\big) \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t} = c_{ji} \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_t}$$

cioè vale (S3) per le x. $\square$

<u>Teorema:</u> 1) $(h_1, \ldots, h_\ell)$ è una base di una sottoalgebra abeliana H di L_0.

2) $L_0 = Y \oplus H \oplus X$ (somma diretta come sottosp. vettoriali; non nec. come algebre di Lie)

dove Y = sottoalg. di Lie gen. da $y_1, \ldots, y_\ell$

X = —, ——— $x_1, \ldots, x_\ell$

Dim.: 1) Dimostriamo che $\left(k\hat{h}_1 \oplus \dots \oplus k\hat{h}_\ell\right) \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$.

Infatti se $\hat{\varphi}\left(\sum a_j \hat{h}_j\right) = 0$ allora $-\sum_j a_j c_{ij} = 0$

Ora, la matrice di Cartan è invertibile anche per un sistema di radici astratto (stessa dim. vista per il sistema di radici di un'alg. di Lie semisemplice), quindi $a_1 = \dots = a_\ell = 0$, e allora $\left(k\hat{h}_1 \oplus \dots \oplus k\hat{h}_\ell\right) \cap \ker(\hat{\varphi}) = \{0\}$

Segue: lo sp. vett. gen. dagli $\hat{h}_i$ va isomorficamente in $gl(V)$ e allora anche in L_0, cioè vale 1).

2) Dimostriamo che $\left(k\hat{x}_1 + \dots + k\hat{x}_\ell + k\hat{h}_1 + \dots + k\hat{h}_\ell + k\hat{y}_1 + \dots + k\hat{y}_\ell\right) \cap \hat{K} = \{0\}$

Definiamo $\hat{S}_j = k\hat{x}_j + k\hat{h}_j + k\hat{y}_j$, abb.: l'immagine di $\hat{S}_j$ in L_0 è un quoziente di $sl(2)$, quindi è $sl(2)$ stessa oppure $\{0\}$.

Nel secondo caso avrei $\hat{K} \supseteq \hat{S}_j$, ma questo è falso perché $h_1, \dots, h_\ell$ sono non nulli per la parte 1). Quindi l'immagine di $\hat{S}_j$ in L_0 è isomorfa a $sl(2)$, e allora $x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ sono tutti non nulli $(\in L_0)$.

Concludiamo che $x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ sono linearmente indipendenti: esercizio (si usa che $x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell$ sono $ad(H)$-autovettori, e i loro autovalori, che sono elementi di H^*, sono tutti distinti; e si usa anche che $h_1, \dots, h_\ell$ sono $ad(H)$-autovettori di autovalore nullo, diverso dagli autovalori degli x_i e y_i, e $h_1, \dots, h_\ell$ sono lin. indipendenti).

Per dimostrare 2) osserviamo l'identità seguente:

$$[h_j, \underbrace{[x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots, [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}] \cdots]}_{\substack{\uparrow \\ \text{elem. di } X}}] = (c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j}) \cdot [x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots, [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}] \dots]$$

dimostrazione: esercizio (induzione su t, per $t=1$ è (S3)).

Analogamente per le y, con il coeff. $-(c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j})$.

Inoltre osserviamo anche:

$$[y_j, [x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}] \dots]] \in X \qquad \text{se } t \geq 2$$

dimostrazione: esercizio (per $t=2$ è (S2)+(S3) e Jacobi, in generale si fa induzione su t).

Analogamente con „x" e „y" scambiate.

Da queste osservazioni deduciamo: 1) $Y + H + X$ è una sottoalgebra di Lie, e allora $L_0 = Y + H + X$;

2) La somma è diretta, cioè $L_0 = Y \oplus H \oplus X$. Infatti la prima osservazione fornisce una decomposizione di L_0 in autospazi per $ad(H)$, gli $ad(H)$-autovalori degli autovettori in X sono del tipo

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i \qquad \text{con } c_i \geq 0 \text{ interi}$$

e gli $ad(H)$-autovalori degli autovettori in Y sono del tipo

$$\sum_{i=1}^{\ell} -d_i \alpha_i \qquad \text{con } d_i \geq 0 \text{ interi}$$

Infatti $\quad c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j} = \langle \alpha_{i_1}, \alpha_j^\vee \rangle + \dots + \langle \alpha_{i_t}, \alpha_j^\vee \rangle =$

$$= \alpha_{i_1}(h_j) + \dots + \alpha_{i_t}(h_j) = \underbrace{(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_t})}(h_j)$$

$\square$

<u>Notazione</u>: Definiamo i seguenti elem. di L_0:

$$X_{ij} = ad(X_i)^{-c_{ji}+1}(X_j)$$

$$Y_{ij} = ad(Y_i)^{-c_{ji}+1}(Y_j) \qquad (\text{per } i \neq j)$$

<u>Lemma</u>: In L_0 vale: $\quad ad(X_s)(Y_{ij}) = 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, l\}$ e $\forall i \neq j$.

(analogam. con „X" e „Y" scambiati)

<u>Dim.</u>: Supponiamo $s \neq i$, allora $[X_s, Y_i] = 0$, e allora $ad(X_s)$, $ad(Y_i)$ commutano. Quindi

$$ad(X_s)\, ad(Y_i)^{(\dots)}(Y_j) = ad(Y_i)^{-c_{ji}+1} ad(X_s)(Y_j) = \begin{cases} ad(Y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j) & \text{se } s = j \\ 0 & \text{se } s \neq j \end{cases}$$

Sappiamo: $ad(Y_i)(h_j) = c_{ij} Y_i$. Se $c_{ij} = 0$ allora abb. finito, altrimenti $c_{ij} \neq 0$, e allora $c_{ij} < 0$ $\quad$ (perché $i \neq j$)

e allora $\quad -c_{ji} + 1 \geq 2$. In questo caso stiamo calcolando

$$\underbrace{[Y_i, [Y_i, \dots, [Y_i, c_{ij} Y_i] \dots]}_{\text{almeno 2 volte}} = 0$$

Invece se $s=i$: $\quad kx_i \oplus kh_i \oplus ky_i \cong \mathfrak{sl}(2)$, e

$$ad(x_i)\, ad(y_i)^m (y_j) = m(\lambda + 1 - m)\, ad(y_i)^{m-1}(y_j)$$

è l'h-peso di y_j, cioè $\lambda = -c_{ji}$

usando la teoria degli $\mathfrak{sl}(2)$-moduli. Questo è $=0$ se $m = -c_{ji}+1$.

$\square$