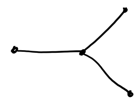
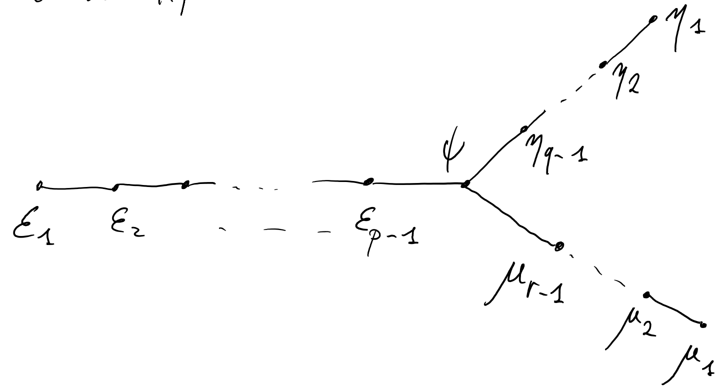
TOKEN 146653

Fine della dimostrazione

Stavamo facendo il passo 5, supponendo esista esattam. un vertice trivalente.

a)  : fatto (B_n, C_n, opp. F_4)

b) Supp. il vertice trivalente sia del tipo , il diagramma allora è del tipo:



$p>1$, $q>1$, $r>1$.

Definiamo $\displaystyle \varepsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i$, $\displaystyle \eta = \sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i$, $\displaystyle \mu = \sum_{i=1}^{r-1} i\mu_i$.

Consid.
$$c_\varepsilon = \frac{(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)(\psi,\psi)} \qquad c_\mu = \frac{(\mu,\psi)^2}{(\mu,\mu)(\psi,\psi)} \qquad (\text{ric. } (\psi,\psi)=1)$$
$$c_\eta = \frac{(\eta,\psi)^2}{(\eta,\eta)(\psi,\psi)}$$

(c_ε = quadrato del coseno dell'angolo formato da ε e ψ)

Ortonormalizziamo $(\varepsilon,\eta,\mu,\psi)$, otteniamo $c_\varepsilon + c_\eta + c_\mu < 1$

(come nel passo 3)). Cioè
$$\frac{4(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)} + \frac{4(\eta,\psi)^2}{(\eta,\eta)} + \frac{4(\mu,\psi)^2}{(\mu,\mu)} < 4.$$

Inoltre $(\varepsilon,\varepsilon) = \dots = \frac{p(p-1)}{2}$, $(\eta,\eta) = \frac{q(q-1)}{2}$, $(\mu,\mu) = \frac{r(r-1)}{2}$

e $(\varepsilon,\psi) = (p-1)(\varepsilon_{p-1},\psi)$ quindi $4(\varepsilon,\psi)^2 = (p-1)^2 \underbrace{4(\varepsilon_{p-1},\psi)^2}_{=1} = (p-1)^2$

Concludiamo
$$\frac{(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}} + \frac{(q-1)^2}{\frac{q(q-1)}{2}} + \frac{(r-1)^2}{\frac{r(r-1)}{2}} < 4$$

allora
$$\frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q} + \frac{r-1}{r} < 2$$

da cui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. Possiamo assumere $p \geq q \geq r$,

e in questo caso $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{r}$. Segue $2 \leq r < 3$

cioè $r = 2$ e concludiamo che il „ramo" più corto è lungo 1.

Segue anche $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{q}$, da cui $q = 2$ opp 3.

Se $q = 2$ allora p può essere qualsiasi, otteniamo D_n.

Se $q = 3$ segue $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$, $p < 6$, da cui:

$p = 3 \rightsquigarrow E_6$

$p = 4 \rightsquigarrow E_7$

$p = 5 \rightsquigarrow E_8$

$\square$

Vedremo il teorema seguente:

Teorema: Sia Φ sistema di radici. Esiste L algebra di Lie semisemplice e $H \subseteq L$ sottoalgebra torale massimale con sist. di radici associato Φ, e L è unica a meno di isomorfismi.

Per completare la classificazione bisognerebbe dim. anche che Φ è indipendente dalla scelta di H in L. Questo non lo vedremo.

Per la dim. del teorema definiremo L per generatori e relazioni.
Studiamo allora algebre di Lie definite per generatori e relazioni. Si parte da un'algebra libera associativa.

Sia V spazio vettoriale, definiamo l'algebra tensoriale

$$T(V) = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots =$$

$$= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{V^{\otimes n}}_{\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ volte}}}$$

E' un'algebra associativa unitaria, col prodotto $T(V) \times T(V) \to T(V)$ definito da $(a_1 \otimes \dots \otimes a_s) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_r) = a_1 \otimes \dots \otimes a_s \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_r$ (estesa multilinearmente a tutta $T(V)$).

Per quest'algebra vale una proprietà universale:

sia $(v_1, \ldots, v_d)$ una base di V, sia A una k-algebra associativa unitaria, siano $w_1, \ldots, w_d \in A$, allora esiste un unico omomorfismo di k-algebre unitarie $T(V) \xrightarrow{\varphi} A$ tale che $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i$.

Inoltre $T(V)$ è un'algebra di Lie come al solito, ponendo $[a, b] = a \otimes b - b \otimes a$.

<u>Def</u>: L'algebra di Lie <u>libera</u> in generatori $x_1, \ldots, x_m$ è definita come segue:

si considera uno spazio vettoriale V con base $x_1, \ldots, x_m$,

si definisce $\underline{L(x_1, \ldots, x_m)}$ = più piccola sottoalgebra di Lie di $T(V)$ contenente $x_1, \ldots, x_m$.

Vale la seguente proprietà universale:

<u>Prop.</u>: Sia L algebra di Lie <u>contenuta in un'algebra associativa unitaria A</u> (in modo che L sia una sottoalgebra di Lie di A). Siano $y_1, \ldots, y_m \in L$ arbitrari. Allora esiste un unico omomorfismo di algebre di Lie $\varphi : L(x_1, \ldots, x_m) \to L$ tale che $\varphi(x_i) = y_i \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

<u>Dim.</u>: Usiamo $\psi : T(V) \to A$ tale che $\psi(x_i) = y_i$, è un omom. di algebre associative unitarie, quindi anche un omom. di algebre di Lie. Ora $L(x_1, \ldots, x_m)$ è ottenuta da $x_1, \ldots, x_m$ facendo bracket e comb. lineari ripetuti a piacere (perché quello che si ottiene

in questo modo è in $L(x_1, \dots, x_n)$, ed è una sottoalgebra di Lie di $T(V)$, quindi deve coincidere con $L(x_1, \dots, x_n)$ per minimalità).

Segue che $\psi(L(x_1, \dots, x_n)) \subseteq L$, poniamo $\varphi = \psi|_{L(x_1, \dots, x_n)} : L(x_1, \dots, x_n) \to L$.

L'unicità di φ è chiara.

$\square$

<u>Def</u>: Siano $R_1, \dots, R_m \in L(x_1, \dots, x_n)$, e consid. $I =$ ideale generato da $R_1, \dots, R_m$ in $L(x_1, \dots, x_n)$, cioè il più piccolo ideale che li contiene.

Allora $\dfrac{L(x_1, \dots, x_n)}{I}$ è detta algebra di Lie definita per generatori (gli $x_1, \dots, x_n$) e relazioni (gli $R_1, \dots, R_m$).

<u>Proposizione</u>: Sia L algebra di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalg. torale massimale, Φ sistema di radici. Scegliamo $\Delta \subseteq \Phi$ base, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ poniamo $h_i = h_{\alpha_i}$, scegliamo $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$ tali che $[x_i, y_i] = h_i$. Allora:

(S1) $[h_i, h_j] = 0 \qquad \forall i, j$

(S2) $[x_i, y_i] = h_i, \quad [x_i, y_j] = 0 \qquad \forall i \neq j$

(S3) $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle x_j, \quad [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle y_j \qquad \forall i, j$

(S_{ij}^+) $(ad(x_i))^{-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(x_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

(S_{ij}^-) $(ad(y_i))^{-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(y_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

Dim.: (S1) chiaro, H è abeliana

(S2): $[x_i, y_i] = h_i$ è la def., $[x_i, y_j] \in L_{(\alpha_i - \alpha_j)}$

non è una radice, per le propr. della base Δ

quindi $L_{\alpha_i - \alpha_j} = \{0\}$, e $[x_i, y_j] = 0$.

(S3) Vale ricordando $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \dfrac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \alpha_j(h_i)$

$\left(h_i = \dfrac{2 t_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)$.

(S_{ij}^+) Consid. $ad(x_i)$: $\quad L_{\alpha_j} \xrightarrow{ad(x_i)} L_{\alpha_j + \alpha_i} \xrightarrow{ad(x_i)} L_{\alpha_j + 2\alpha_i} \longrightarrow \cdots$

Le radici coinvolte sono la α_i-stringa di α_j. Inoltre $\alpha_j - \alpha_i$ non è una radice, quindi la stringa è:

$\alpha_j, \; \alpha_j + \alpha_i, \; \dots, \; \alpha_j + q\alpha_i$

e ricordiamo $\underset{\overset{\|}{0}}{r} - q = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, cioè $q = -\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$.

Quindi l'ultima radice si ottiene applicando $ad(x_i)$ a x_j un numero di volte pari a $-\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, la relazione segue.

(S_{ij}^-): analogo a (S_{ij}^+).

$\square$

<u>Teorema</u> (Serre): Sia Φ sistema di radici, Δ = base di Φ.

Sia L algebra di Lie def. per generatori e relazioni:

generatori $\quad x_1, \dots, x_\ell, h_1, \dots, h_\ell, y_1, \dots, y_\ell \qquad (\ell = |\Delta|)$

relazioni: $(S1), (S2), (S3), (S_{ij}^+), (S_{ij}^-) \quad (\forall i \neq j)$

Allora L ha dimensione finita, è semisemplice, $H = \mathrm{Span}\{h_1, \dots, h_\ell\}$ è una sottoalgebra torale massimale, e il sistema di radici corrispondente è isomorfo a Φ.

Per la dimostrazione:

$$\hat{L} = L(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\ell) \qquad \text{(algebra di Lie libera)}$$

$\hat{K}$ = ideale generato dalle relaz. $(S1), (S2), (S3)$ „applicate" agli elem. $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\ell, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_\ell, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\ell$, e def.

$$L_0 = \frac{\hat{L}}{\hat{K}}$$

Poniamo (per abuso di notazione) $\quad x_i = \hat{x}_i + \hat{K}$

$$h_i = \hat{h}_i + \hat{K}$$

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{K}$$

(i veri elem. x_i, h_i, y_i saranno nel quoz. di $\hat{L}$ per l'ideale generato da <u>tutte</u> le relazioni).

Per studiare L_0, studieremo prima di tutto una rappresentazione di $\hat{L}$ (che passa al quoziente). La definizione invita la costruzione dei <u>moduli di Verma</u>.

Partiamo da uno spazio vettoriale W con base $(v_1, \dots, v_\ell)$, considero $V = T(W)$ e definisco una rappresentazione di $\hat{L}$ su V:

$$\hat{\varphi} : \hat{L} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \quad :$$

$$\begin{cases} \hat{h}_j \cdot 1 = 0 \\ \hat{h}_j \cdot (v_{i_1} \dots v_{i_t}) = -\left(c_{i_1,j} + \dots + c_{i_t,j}\right) v_{i_1} \dots v_{i_t} \end{cases}$$

(notazione: $v_{i_1} \dots v_{i_t} = v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_t}$)

$$\begin{cases} \hat{y}_j \cdot 1 = v_j \\ \hat{y}_j \cdot (v_{i_1} \dots v_{i_t}) = v_j \, v_{i_1} \dots v_{i_t} \end{cases}$$

($\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = c_{ij}$)

$$\begin{cases} \hat{x}_j \cdot 1 = 0 = \hat{x}_j \cdot v_i \\ \hat{x}_j \cdot (v_{i_1} \dots v_{i_t}) = v_{i_1} \cdot (\hat{x}_j \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}) - \delta_{i_1 j} \left(c_{i_2,j} + \dots + c_{i_t,j}\right) v_{i_2} \dots v_{i_t} \end{cases}$$

(definisce l'azione di $\hat{x}_j$ ricorsivamente).