

TOKEN: 885041

Esercizi foglio 8

N.1 Data $\alpha \in \Phi = \text{stet. di radici}$, dim. che $(\mathbb{R}\alpha) \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$.

Svolgimento: Sia $c \in \mathbb{R}$ e supponi $\beta = c\alpha \in \Phi$. Allora

$$\frac{2(c\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \text{ cioè } 2c \in \mathbb{Z}, \text{ cioè } c = \frac{m}{2} \text{ per } m \in \mathbb{Z}.$$

Poss. supporre $c > 0$, $m > 0$. Per lo stesso motivo scambiando α e β :

$$2 \cdot \frac{1}{c} \in \mathbb{Z}, \text{ cioè } \frac{1}{c} = \frac{m}{2} \text{ con } m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Segue $mm = 4$. Allora $m = n = 2$ e allora $\alpha = \beta$.

Altrimenti $m = 1$, $n = 4$, e allora $\beta = 2\alpha$, escluso dagli assiomi,

oppure $m = 4$, $n = 1$, $\alpha = 2\beta$, escluso dagli assiomi.

Es. 2: $\alpha \in E \setminus \{0\}$, E' sottosp. vett. tale che $S_\alpha(E') = E'$. Allora

$\alpha \in E'$ opp. ogni vettore di E' è ortog. ad α .

Supponi $\alpha \notin E'$, e sia $\beta \in E'$, calcoliamo

$$S_\alpha(\beta) = \beta - \underbrace{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}_{\uparrow} \alpha \in E'$$

Segue: $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in E'$. Se $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \neq 0$ avrei $\alpha \in E'$ assurdo,

da cui $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$, cioè $(\alpha, \beta) = 0$.

Es. 3: Ordine di $S_\alpha S_\beta$ per α, β radici di $\Phi \subseteq \mathbb{R}^2$.

(qui α, β sono con angolo $\neq 0$ più piccolo possibile, rimpiazzando β con $-\beta$ si può prendere $\Delta = \{\alpha, \beta\} = \text{base}$)

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \end{array} : (S_\alpha S_\beta)^2 = \text{Id} \qquad (S_\alpha S_\beta)^3 = \text{Id}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \leftarrow & & \leftarrow \end{array} (S_\alpha S_\beta)^4 = \text{Id} \qquad (\text{due esagoni}) \quad (S_\alpha S_\beta)^6 = \text{Id}$$

Es. 4 & 5: facili osservando che S_α conserva le lunghezze.

Es. 6: facile.

Es. 7: $\sigma \in W$ riflessione rispetto a $\gamma \in E \setminus \{0\}$.

Supp. per assurdo $\gamma^\perp \cap E^{\text{reg}} \neq \emptyset$,

e sia $v \in \gamma^\perp \cap E^{\text{reg}}$. Allora

σ stabilizza v e anche $\Delta(v)$.

Ma W agisce in modo semplicemente transitivo su $\{ \text{basi di } \Phi \}$, e

quindi $\sigma = \text{Id}_E$, assurdo. Segue

$\gamma^\perp \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp$. Es. di algebra lineare ^(su \mathbb{R}): esiste $\alpha \in \Phi$ tale che

$\gamma^\perp = \alpha^\perp$. Segue: $S_\alpha = \sigma$.

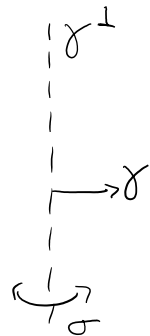


Abb. visto: il diagramma di Dynkin (equivalentem. la matrice di Cartan) determina Φ a meno di isomorfismi.

Def: Φ si dice riducibile se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ (unione disgiunta) con $\Phi_1 \perp \Phi_2$, Φ_i non vuoto.

Oss.: Se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ è riducibile, allora $E = (\text{Span } \Phi_1) \oplus (\text{Span } \Phi_2)$,
e per un exerc. del foglio 8, Φ_i è un
sist. di radici in $E_i = \text{Span } \Phi_i$.

2) Φ riducibile è equivalente a richiedere $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ dove $\Delta =$ base di Φ , Δ_1, Δ_2 sottosistemi non vuoti e $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Infatti se $\Delta_1 \perp \Delta_2$ allora le riflessioni semplici di Δ_1 fissano ogni dem. di Δ_2 , e viceversa. Segue che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ dove $\Phi_i =$ radici ottenute applicando sequenze di rifless. semplici di Δ_i a vettori di Δ_i .

3) Da 2) segue: Φ è irriducibile \Leftrightarrow il diagr. di Dynkin è connesso.

In generale Φ si decompone in modo unico come unione disgiunta di sottosistemi non vuoti $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_l$

dove $\Phi_i \perp \Phi_j \quad \forall i \neq j$, e Φ_i irriducibile $\forall i$ (cioè perché il diagr. di Dynkin è unione disgiunta delle sue comp. connesse).

Ora quindi classificheremo i diagrammi connessi, che corrisp. ai sistemi di radici irriducibili.

Teorema: La lista $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ è la lista completa dei diagrammi di Dynkin connessi.

Dim.: Dimostreremo che un diagramma di Dynkin connesso è in questa lista.

Che tutti i diagrammi in lista corrispondano a sistemi di radici lo verificheremo negli esercizi.

Sia allora $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ base di Φ . Normalizziamoli:

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$$

Allora:

1) $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ sono lin. indep., di lunghezza 1

2) $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0 \quad \forall i \neq j$

3) $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \forall i \neq j$

Chiameremo ammissibile una famiglia di vettori con le propr. 1), 2), 3), e da essa si costruisce il grafo di Coxeter come per Δ . Un grafo del genere si dirà ammissibile.

Passo 1: Nel grafo di Coxeter ^(di una fam. ammissibile con n elem.) ci sono al più $n-1$ coppie di punti collegati.

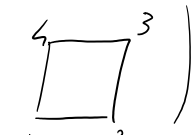
Dim.: Sia $v = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, allora $0 < \|v\|^2 = n + \sum_{i < j} \underline{2 \cdot (\varepsilon_i, \varepsilon_j)}$

Segue $\sum_{i < j} 2 |(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| < n$.

Inoltre $4 |(\varepsilon_i, \varepsilon_j)|^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ se $i \neq j$

da cui $|(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| \begin{cases} = 0 & \text{opp.} \\ \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

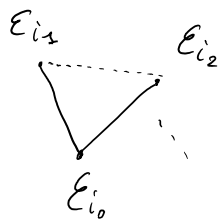
Segue $|\{(i, j) \mid i < j \text{ e } (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0\}| \leq \sum_{i < j} 2 |(\varepsilon_i, \varepsilon_j)| < n$
↑
ciò vertici collegati □ (Passo 1)

Passo 2: Nel grafo di Coxeter non ci sono circuiti (es. )

Dim.: Un sottoinsieme di una fam. ammissibile è ammissibile, e se avessimo un circuito che coinvolge n vertici, formerebbero una fam. ammissibile di n elem. e n coppie collegate: assurdo per passo 1.
□ (Passo 2)

Passo 3: Da ogni vertice partono al più 3 lati.

Dim.: Sia ε_{i_0} un elem. della famiglia, consid. $\varepsilon_{i_{k-1}}, \varepsilon_{i_m}$ i vertici collegati a ε_{i_0} (sono quelli non ortogonali a ε_{i_0}).



Vale: E_{i_j} e E_{i_l} sono ortogonali se $i \neq j$, altrimenti formerebbero un circuito con E_{i_0} .

Consid. $(E_{i_1}, \dots, E_{i_m}, E_{i_0})$, ortormalizziamo questi vettori col procedim. di Gram-Schmidt, otteniamo $(E_{i_1}, \dots, E_{i_m}, \eta)$. Visto che otteniamo una base ortonormale di un sottosp. che contiene E_{i_0} , abb.:

$$E_{i_0} = (E_{i_0}, \eta) \cdot \eta + \sum_{j=1}^m (E_{i_j}, E_{i_0}) E_{i_j}$$

$$\text{Calcoliamo } 1 = (E_{i_0}, E_{i_0}) = \underbrace{(E_{i_0}, \eta)^2}_{\neq 0} + \sum_{j=1}^m (E_{i_j}, E_{i_0})^2$$

← perché E_{i_0} non è comb. lin. di E_{i_1}, \dots, E_{i_m}

allora $\sum_{j=1}^m (E_{i_j}, E_{i_0})^2 < 1$.

Segue $\sum_{j=1}^m 4 (E_{i_j}, E_{i_0})^2 < 4$ ed \bar{e} un intero, quindi ≤ 3 .

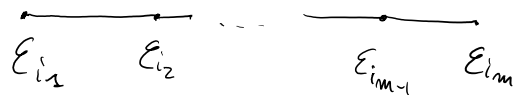
Inoltre $\sum_{j=1}^m 4 (E_{i_j}, E_{i_0})^2 = \bar{e}$ il numero totale di vertici che escono da E_{i_0} .

In particolare, se c'è un "lato triplo": $\overset{\equiv}{E_1} \cdot E_2$ allora il diagramma ha solo questi due vertici e questi tre lati: otteniamo



Possiamo assumere d'ora in poi: il diagramma di partenza ha solo lati semplici o doppi.

Passo 4: Supponiamo di avere un sottografo del tipo



di tipo A_m , cioè una sequenza di vertici $\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_m}$ in cui gli unici lati sono semplici e fra ϵ_{i_j} e $\epsilon_{i_{j+1}}$.

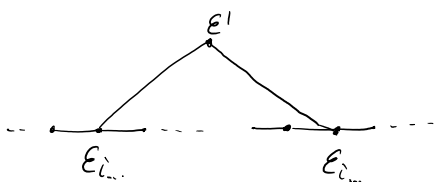
Convid. $\epsilon_0 = \epsilon_{i_1} + \dots + \epsilon_{i_m}$, dim. che la famiglia ottenuta cancellando $\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_m}$ e rimpiazzandoli col solo ϵ_0 è ammissibile.

$$\text{Calcoliamo } (\epsilon_0, \epsilon_0) = m + \sum_{l < j} 2(\epsilon_{i_l}, \epsilon_{i_j})$$

$$\text{inoltre } (\epsilon_{i_l}, \epsilon_{i_j}) = 0 \text{ se } l \neq j-1, \text{ e } (\epsilon_{i_{j-1}}, \epsilon_{i_j}) = \frac{-1}{2}$$

$$\text{quindi } (\epsilon_0, \epsilon_0) = m + (-m+1) = 1.$$

Sia infine $\epsilon' = \text{vertice} \notin \{\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_m}\}$. Oss.:



è impossibile perché non abbiamo circuiti, quindi ϵ' è collegato al massimo

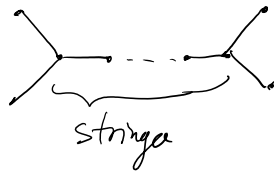
a un vertice in $\{\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_m}\}$, mettiamo ϵ_{i_j} , e allora:

$$4(\epsilon', \epsilon_0)^2 = \begin{cases} 4(\epsilon', \epsilon_{i_j})^2 & \text{se } \epsilon_{i_j} \text{ esiste} \\ 0 & \text{se } \epsilon' \text{ non è collegato ad alcun} \\ & \text{vertice in } \{\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_m}\}. \end{cases}$$

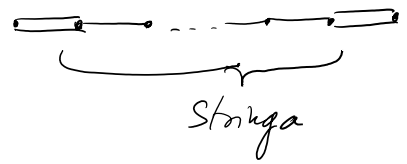
□ (Passo 4)

Segue che ad ogni "stringa" non sono collegati più di 3 lati

ad es.



e

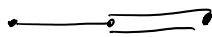


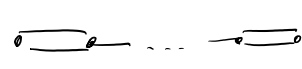

sono impossibili:

Passo 5) Se il diagramma è connesso e non ci sono vertici trivalenti (cioè da cui escono 3 lati), il diagramma è A_n .

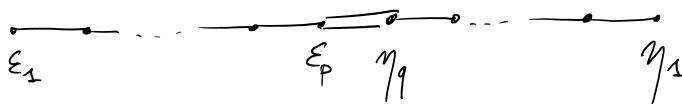
Supp. esista un vertice trivalente.

a) Supp. il vertice trivalente sia del tipo:



Il grafo continua da tutte e due le parti, ma senza altri vertici trivalenti altrimenti avrei  già escluso, opp. , escluso per lo stesso motivo di prima.

Quindi abb.:



Qui usiamo: $\epsilon = \sum_{i=1}^p i \epsilon_i$, $\eta = \sum_{j=1}^q j \eta_j$.

Allora $(\epsilon, \eta)^2 < (\epsilon, \epsilon) (\eta, \eta)$ (Cauchy-Schwarz per vettori lin. indep.)

Inoltre $(\varepsilon, \eta)^2 = p^2 q^2 (\varepsilon_p, \eta_q)^2 = \frac{p^2 q^2}{2}$, e abb.:


$$\begin{aligned}(\varepsilon, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^p i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} 2(i+1)i (\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} (i+1)i = \dots = \frac{p(p+1)}{2}\end{aligned}$$

analogam. $(\eta, \eta) = \frac{q(q+1)}{2}$

Concludiamo: $\frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2}$, da cui $(p-1)(q-1) < 2$

Allora se $p=1$ opp. $q=1$, l'altro è libero e otteniamo

B_m opp. C_m . Se $p > 1$, $q > 1$ allora $p=q=2$ e

il grafo è , quindi T_4 .