Oss.: 1) Se $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ commutano ($XY = YX$) allora

$$(X+Y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k Y^{m-k}$$

e si ottiene facilmente la solita formula $e^X e^Y = e^{X+Y}$

Attenzione: se $XY \neq YX$ allora si può verificare $e^X \cdot e^Y \neq e^{X+Y}$.

Ad es. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Osserviamo che X e $-X$ commutano, qualsiasi sia $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Segue:
$$e^X \cdot e^{-X} = e^0 = I_n$$

cioè e^X è una matrice <u>invertibile</u>, con inversa e^{-X},

cioè $e^X \in GL(n, \mathbb{C})$:

allora l'esponenziale può essere considerato come applicaz.

$$\exp: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

3) Calcolare e^A è facile se A è nilpotente (perché allora la somma è finita) oppure se A è diagonale, perché

se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ allora $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

4) Prendiamo $C \in GL(n, \mathbb{C})$ e $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$C e^A C^{-1} = C \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m \right) C^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} C A^m C^{-1} =$$

questo perché il coniugio per C
è un'appl. continua $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left(CAC^{-1}\right)^m = e^{CAC^{-1}}.$$

5) Da 3) e 4) segue che è facile calcolare l'esponenziale di matrici diagonalizzabili, infatti se $A = CDC^{-1}$ con D diagonale e $C \in GL(n, \mathbb{C})$, allora

$$e^A = e^{CDC^{-1}} = C \underbrace{e^D}_{\text{è facile da calcolare}} C^{-1}$$

Più avanti nel corso vedremo come usare queste cose per calcolare l'esponenziale di matrici qualsiasi.

Obiettivo adesso: dimostrare che $e^{\log(X)} = X$ e $\log(e^X) = X$ se X è scelto opportunamente (va fatta attenzione al dominio che abb. fissato per log).

Per questo: PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE

Proposizione: L'insieme delle matrici diagonalizzabili è denso in $M_n(\mathbb{C})$, cioè $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ esiste una successione di matr. diagonalizzabili che tende ad A.

Oss.: Da questo segue anche che le matrici diagonalizzabili invertibili sono dense in $GL(n, \mathbb{C})$.

Per la dim.:

<u>Lemma</u>: Ogni matrice di $M_n(\mathbb{C})$ è simile a qualche matrice triangolare superiore.

<u>Dim.</u>: Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$, allora A ha almeno un autovalore (perché siamo su $\mathbb{C}$) e almeno un autovettore v_1.

Completiamo v_1 a una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{C}^n$.

L'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ che ha matrice canonica A, nella base $\mathcal{B}$ ha matrice

$$C = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{*}_{A'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e la matrice C è simile ad A. Sia A' ottenuta da C cancellando la prima riga e la prima colonna, allora per induzione A' è simile ad una matr. triangolare superiore:

$$D \cdot A' \cdot D^{-1} = T$$

per una $D \in Gl(n-1, \mathbb{C})$, e $T \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ è triang. sup.

Allora C è coniugata ad una matr. triang. superiore tramite

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\square$

<u>Dim. della proposizione:</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$, siano $M \in GL(n, \mathbb{C})$ e B triangolare superiore tali che

$$B = M A M^{-1}.$$

Ora

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di B.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono distinti, allora B è diagonalizzabile, e allora anche A. Altrimenti alcune delle entrate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono uguali fra loro. In questo caso:

costruiamo una successione di matrici convergenti a B:

$$B_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} B$$

con B_k uguale a B fuori dalla diagonale, e sulla diagonale B_k ha entrate $\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k}$ tutte diverse e tali che $\lambda_{i,k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_i$. Poniamo $A_k = M^{-1} B_k M$, e abb.

$$A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} M^{-1} B M = A.$$

Per la scelta dei $\lambda_{i,k}$ abb. che B_k è diagonalizzabile $\forall k$, e anche allora A_k. $\square$

FINE PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE

<u>Teorema</u>: 1) Per ogni $g \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|g - I_n\| < 1$ vale

$$e^{\log(g)} = g$$

2) Per ogni $X \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|X\| < \log(2)$ vale

$$\|e^X - I_n\| < 1 \quad \text{e}$$

$$\log(e^X) = X.$$

Per la dimostrazione:

<u>Lemma:</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ e sia λ autovalore di A. Allora $|\lambda| \leq \|A\|$.

<u>Dim.:</u> Sia v autovettore di A di autovalore λ, e costruiamo la matrice B che ha per colonne il vettore v (ripetuto n volte):

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{v} & \cdots & \boxed{v} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda v} & \cdots & \boxed{\lambda v} \end{pmatrix} \qquad (\text{perché } Av = \lambda v)$$

Segue $\|A \cdot B\|^2 = n \cdot |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2$ e $\|B\|^2 = n \cdot \|v\|^2$

Quindi da $\|A \cdot B\|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$

segue

$$\cancel{n} \cdot |\lambda|^2 \cdot \cancel{\|v\|^2} \leq \cancel{n} \cdot \cancel{\|v\|^2} \cdot \|A\|^2$$

cioè $|\lambda| \leq \|A\|$. $\square$

Dim. del teorema: 1) Supponiamo g diagonalizzabile:

$$g = C \cdot D \cdot C^{-1} \quad \text{con } D \text{ diagonale}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$ cioè $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori

di g. Allora $\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1$ sono gli autovalori

di $g - I_n$, e vale $|\lambda_i - 1| < 1$ $\forall i$, perché

$\|g - I_n\| < 1$ e il lemma precedente.

Poniamo $X = g - I_n$, allora $C(D - I_n)C^{-1} = X$

e come prima il coniugo per C "esce" dalla serie che def. il logaritmo

$$\log(g) = \log(1 + X) = C \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (\lambda_1 - 1)^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (\lambda_n - 1)^m \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= C \begin{pmatrix} \log(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \log(\lambda_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

allora $$e^{\log(g)} = C \begin{pmatrix} e^{\log(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\log(\lambda_n)} \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= C D C^{-1} = g$$

Se invece g non è diagonalizzabile, la approssimo con una successione di matr. diagonalizzabili e uso la continuità di log e di exp.

2) Sia X con $\|X\| < \log(2)$, allora:

$$\|e^X - I_n\| = \left\| \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m \right\| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \|X^m\| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \|X\|^m = e^{\|X\|} - 1 < 1 .$$

La dim. dell'uguaglianza è uguale a quella di prima. $\square$

L'esponenziale su $M_n(\mathbb{R})$

Le funzioni exp e log sono definite su $M_n(\mathbb{R})$ per restrizione (mantenendo le stesse condizioni sulla norma).

<u>Proposizione</u>: La funzione exp è C^∞ su tutto $M_n(\mathbb{R})$.

<u>Dim.</u>: Consideriamo l'entrata al posto (i,j) di e^A, come f.ne delle entrate di A:

$$f_{ij} : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Fissiamo i valori di tutte le variabili tranne una. Viene una serie di potenze nella variabile rimanente (centrata in 0) con raggio di convergenza $+\infty$, quindi la sua derivata esiste e si ottiene derivando monomio per monomio. Quindi esiste ad es.

$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{11}}$ su tutto $M_n(\mathbb{R})$.

La posso considerare come serie di potenze in tutte le variabili data dalla stessa formula (perché l'ho ottenuta dalla serie di f_{ij} derivando ciascun monomio). Posso riapplicare lo stesso ragionam. allora per ottenere che le altre derivate parziali esistono e sono continue. Quindi f_{ij} è C^{∞}. $\square$