TOKEN: 936458

Abb. visto:

Teorema: $\ell(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) < 0\}| \qquad \forall w \in W.$

Dim.: Procediamo per induzione su $\ell(w)$, scriviamo $n(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) < 0\}|$.

Base: $\ell(w) = 0$, cioè $w = Id_E$ e ovviam. $n(w) = 0$ in questo caso.

Passo induttivo: scriviamo $w = s_1 \cdots s_t$ in scrittura ridotta, cioè $t = \ell(w)$ e $s_1, \dots, s_t$ sono riflessioni semplici. Abb. visto: $w(\alpha_t) < 0$. Consid. $ws_t = s_1 \cdots s_{t-1}$. Sicuram. $\ell(ws_t) = t-1$, perché se potessi scrivere ws_t con meno rifless. semplici, allora scriverei $w = (ws_t) \cdot s_t$ con meno di t riflessioni semplici.

Vediamo ora le radici che cambiano segno con ws_t:

$$\{\beta \in \Phi^+ \mid w\underbrace{s_t(\beta)}_{} < 0\} \xleftrightarrow[1:1]{s_t} \{\gamma \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_t\} \mid w(\gamma) < 0\}$$

s_t è una biiezione fra questi due insiemi. Segue: $n(w) = n(ws_t) + 1$.

Allora $\ell(w) = \ell(ws_t) + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per induz.}}}{=} n(ws_t) + 1 = n(w)$.

$\square$

Corollario: W agisce in modo semplicem. transitivo sull'insieme delle basi di Φ (equivalentem. sulle camere di Weyl).

Dim.: Supponiamo $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{base di partenza}}}{w_1(\Delta)} = w_2(\Delta)$ per $w_1, w_2 \in W$. Allora

$w_2^{-1} w_1 (\Delta) = \Delta$, cioè $w_2^{-1} w_1 (\Phi^+) = \Phi^+$. Quindi segue che nessuna radice positiva cambia segno con $w_2^{-1} w_1$, e dal teorema segue $\ell(w_2^{-1} w_1) = 0$, cioè $w_2^{-1} w_1 = Id_E$, e $w_1 = w_2$.

$\square$

Prop.: Sia C camera di Weyl, allora $\overline{C}$ (in E) è un domnio fondamentale per W, cioè ogni orbita di W interseca $\overline{C}$ in esattam. un punto.

Dim.: Poss. supporre che C sia la camera fondamentale, cioè quella che corrisponde a Δ. Sia $\lambda \in E$, esiste $w \in W$ tale che $w(\lambda) \in \overline{C}$ (esercizio, suggerimento: imporre che $(w(\lambda), \gamma)$ sia massimo, dove $\gamma \in C$).

Dim. che $w(\lambda)$ è unico (anche se w non lo è necessariamente), cioè siano $w_1, w_2 \in W$ tali che $w_1(\lambda) = \mu_1$, $w_2(\lambda) = \mu_2$ siano in $\overline{C}$. Cioè $\underbrace{w_2^{-1} w_1}_{= \sigma} (\mu_1) = \mu_2 \in \overline{C}$. Sia $\sigma = s_1 \cdots s_t$ scrittura ridotta, e sappiamo $\sigma(\alpha_t) < 0$. Abbiamo:

$$0 \geq (\mu_2, \sigma(\alpha_t)) = (\sigma^{-1}(\mu_2), \alpha_t) = (\mu_1, \alpha_t) \geq 0$$

Da questo $(\mu_2, \sigma(\alpha_t)) = (\mu_1, \alpha_t) = 0$. Allora:

$$\sigma(\mu_1) = s_1 \cdots \underbrace{s_t(\mu_1)}_{= \mu_1 - \cancel{\langle \mu_1, \alpha_t^\vee \rangle} \alpha_t} = \underbrace{s_1 \cdots s_{t-1}}(\mu_1) = \mu_2$$

cioè mando μ_1 in μ_2 usando un elem. di lunghezza inferiore.

Iterando: posso mandare μ_1 in μ_2 con elem. di W di lunghezza arbitrariam. bassa, ad es. 0, cioè $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

Classificazione dei sistemi di radici

<u>Def</u>: Sia $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base di un sist. di radici Φ, la matrice

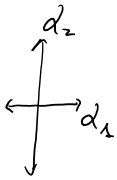
$$C = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle & \dots \\ \dots & \end{pmatrix} = \left(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

è detta <u>matrice di Cartan</u> di Φ. E' indipendente dalla scelta di Δ (a meno di rinumerarne gli elem.) perchè W agisce in modo transitivo sull'insieme delle basi.

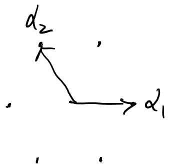
<u>Oss.</u>: Se α_i e α_j sono ortogonali, $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 0$.
Se $i = j$ allora $\langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 2$, cioè sulla diagonale della matrice le entrate sono uguali a 2.
Se $i \neq j$ e α_i non è ortogonale a α_j:

Se α_j è lunga quanto α_i o più lunga allora $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$.
se α_i è lunga quanto α_j o più lunga allora $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1, -2,$ opp. -3
(a seconda di $-\frac{\|\alpha_i\|^2}{\|\alpha_j\|^2}$)

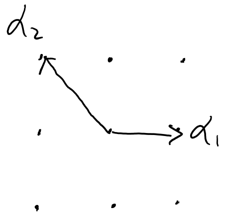
Esempi:



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



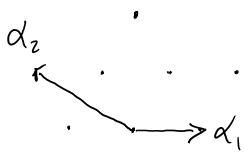
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



$\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

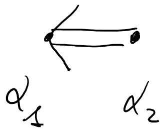
$\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle$

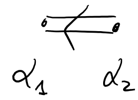


$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Def.: Il grafo di Coxeter di Φ è il grafo che ha Δ come insieme di vertici, e fra α_i e α_j abb. $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \cdot \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$ lati $(= 0, 1, 2$ opp. 3 lati$)$.

Il diagramma di Dynkin di Φ è ottenuto dal grafo di Coxeter aggiungendo una „freccia" da α_i a α_j se α_i è più lunga di α_j:

es. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ 

(opp. 

)

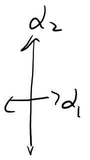
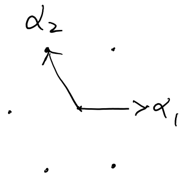
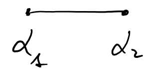
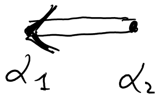
Esempi: 

diagramma di Dynkin: 



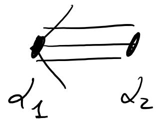


(quadrato)



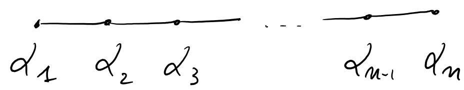
(α_2 è più lunga di α_1)

(due esagoni)



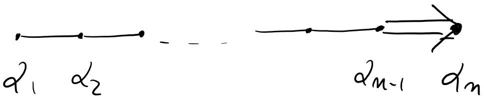
<u>Nome:</u>

$sl(n+1)$:



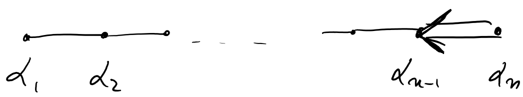
A_n $(n \geq 1)$

$so(2n+1)$:



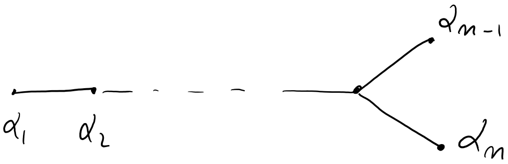
B_n $(n \geq 1)$

$sp(2n)$:



C_n $(n \geq 1)$

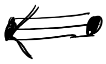
$so(2n)$:



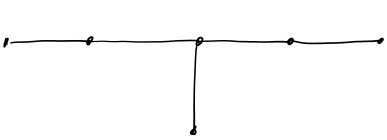
D_n $(n \geq 2)$

Altri diagrammi di sistemi di radici:

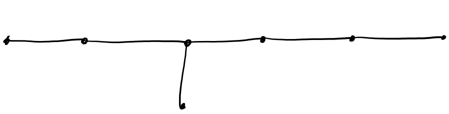
F_4



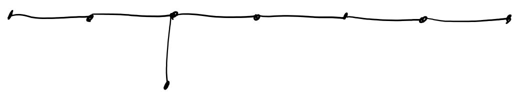
G_2 (i due esagoni $= \Phi$)



E_6



E_7



E_8

Casi particolari: $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $D_3 = A_3$, $D_2 =$ due copie sconnesse di A_1.

Vedremo che il diagramma di Dynkin classifica Φ, a meno di isomorfismo, dove questa nozione è data per rispecchiare gli isom. fra alg. di Lie semisemplici.

Def: Siano $\Phi \subseteq E$, $\Phi' \subseteq E'$ sistemi di radici in due spazi euclidei.
Φ e Φ' si dicono isomorfi se esiste $f: E \to E'$ isomorfismo lineare (non necess. isometria) tale che $f(\Phi) = \Phi'$, e
$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi$.

Prop.: Il diagramma di Dynkin determina univocam. Φ a meno di isomorfismi. Cioè se Φ' è un altro sist. di radici, ed esiste una biiezione $f: \Delta \to \Delta'$ dove Δ e Δ' sono basi, e f induce un isomorfismo di diagrammi (cioè i lati e le frecce sono conservati da f), allora f si estende a $f: E \to E'$ che rende Φ e Φ' isomorfi.

Dim.: Il diagramma determina univocam. la matrice di Cartan, quindi f soddisfa $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta$.

Visto che Δ e Δ' sono basi, f si estende linearmente a isom. lineare $f: E \to E'$. Inoltre:

$$s_{f(\alpha)}(f(\beta)) = \dots = f(s_\alpha(\beta)) \qquad \forall \alpha, \beta \in \Delta$$

Cioè

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_\alpha"] & E' \arrow[d, "s_{f(\alpha)}"] \\ E \arrow[r, "f"'] & E' \end{tikzcd}$$

commuta: $s_{f(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$, cioè $s_{f(\alpha)} = f \circ s_\alpha \circ f^{-1}$.

Allora $w \longmapsto f \circ w \circ f^{-1}$ è un omom. di gruppi $W \to W'$, ovviam. iniettivo, e manda generatori in generatori. Quindi è un isomorfismo.

Data ora $\beta \in \Phi$, prendiamo $w \in W$ tale che $\beta = w(\alpha) \in \Delta$, allora

$$f(\beta) = \underbrace{(f \circ w \circ f^{-1})}_{\in W'}(\underbrace{f(\alpha)}_{\in \Delta'}) \in \Phi$$

cioè f manda Φ in Φ'. Segue $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)^\vee \rangle$ $\forall \beta \in \Phi$ $\forall \alpha \in \Delta$, e anche $\forall \alpha \in \Phi$.

$\square$