TOKEN: 895154

Esercizi foglio 7

Es. 1: $\mathfrak{sl}(n)$: $\Phi = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j \}$

Per $\mathfrak{so}(n, J_0)$:

$$\mathfrak{so}(2m, J_0) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -\tilde{A} \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{A} = \text{trasposta risp alla diag. secondaria} \\ B, C = \text{antisimm. rispetto alla diag. —''—} \end{array} \right\}$$

(con A di taglia m)

$$\mathfrak{so}(2m+1, J_0) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} A & v & B \\ \hline w & 0 & -v^t \\ \hline C & -w^t & -\tilde{A} \end{array} \right) \;\middle|\; \text{———} , \text{———} \right\}$$

Allora per $\mathfrak{so}(2m, J_0)$: $\Phi = \{ \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j \}$

segni indipendenti

per $\mathfrak{so}(2m+1, J_0)$: $\Phi = \{ \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j \} \cup \{ \pm \varepsilon_i \}$

Per $\mathfrak{sp}(2m)$: $\Phi = \{ \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i, j \text{ qualsiasi} \} =$

$= \{ \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j \} \cup \{ \pm 2\varepsilon_i \}$

Vediamo anche una base per Φ di $\mathfrak{sl}(n)$: $\Delta = \{ \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \}$

Se $i < j$ abb. $\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \ldots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)$

Se $i > j$ abb. $\varepsilon_i - \varepsilon_j = -\left((\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}) + \ldots + (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) \right)$

Quindi $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ è positiva $\iff i < j$

Es. n. 2: $L = L_1 \oplus \_ \oplus L_t$ $\quad H \subseteq L$ torale massimale

Da dim.: $H_i = L_i \cap H$ è torale massimale in L_i.

Consid. $\pi_i : L \to L_i$ le proiezioni, e

$\underbrace{\pi_1(H) \oplus \_ \oplus \pi_n(H)} \subseteq L$

D'altronde posso pensare L dentro $gl(n)$, L_i dentro $gl(n_i)$ tramite la rappr. aggiunta, che è iniettiva, e $\pi_i : L \to L_i$ ma rappres. di L, quindi preserva la semisemplicità degli elem..

Allora $\pi_i(H)$ è torale, e $\pi_1(H) \oplus \_ \oplus \pi_n(H)$ è torale, e contiene H, quindi coincide con H.

Da questo segue anche che $H \cap L_i = \pi_i(H)$ (fatto semplice di algebra lineare).

Concludiamo che $H \cap L_i$ è torale massimale in L_i, perché se ho $L_i \supseteq K \supseteq H \cap L_i$ con K torale, allora

$$\pi_1(H) \oplus \_ \oplus \pi_{i-1}(H) \oplus K \oplus \pi_{i+1}(H) \oplus \_ \oplus \pi_t(H)$$

è torale $\subseteq L$, quindi coincide con H, e allora $K = L_i \cap H$.

Quindi gli autospazi per $ad(H)$ sono gli autosp. per $ad(H \cap L_i)$ nei vari L_i, e l'$ad(H)$-autovalore di un $L_\alpha^{\subseteq L_i}$ si scrive come

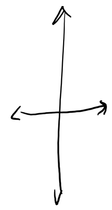
$\alpha : H \to k$ $\quad$ con $\alpha(h_1, .., h_t) = \beta(h_i)$ dove β è radice di L_i risp. a $H \cap L_i$.

Identificando α con β, otteniamo

$$\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_t \qquad \text{con } \Phi_t = \left\{ \begin{array}{l} \text{radici di } L_i \text{ rispetto} \\ \text{a } H \cap L_i \end{array} \right\}$$

Si vede facilmente: se $i \neq j$ allora $K(\Phi_i, \Phi_j) = 0$.

Es.:

 = unione di  su $\mathbb{R}$ e

 su $\mathbb{R}$, due sistemi di radici, in due

sottospazi ortogonali di E.

Es. n.3: L semisemplice, $H \subseteq L$ torale massimale, dim. che $H = N_L(H)$

Infatti $x \in L$:

$$x = y + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha \qquad \text{con } y \in H,\ x_\alpha \in L_\alpha$$

Dato $h \in H$, abb. $[h, x] = 0 + \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\, x_\alpha$.

Se $[h, x] \in H$ $\forall h$, allora $\alpha(h) x_\alpha = 0$ $\forall \alpha \in \Phi$ (perché gli x_α nonnulli sono lin. indip., e le radici sono funzionali non nulli su H)

Segue: $x_\alpha = 0$ $\forall \alpha$. Cioè $x \in H$.

Es. 4: L semisemplice di dim. 3: dim. che $L \cong sl(2)$.

Se $L = H$ allora L non ha radici, ma L sarebbe abeliana:

assurdo. Quindi $L \supsetneq H$, e allora L ha almeno una radice α, e una sottoalgebra $S_\alpha \cong sl(2)$. Visto che L ha dim. 3, vale

$L = S_\alpha \cong sl(2)$.

$\square$

<u>Es. 5</u>: Non ci sono algebre semisemplici di dim. 1, 2, 4, 5, 7

1, 2: v. esercizio precedente: L contiene almeno una S_α, quindi $\dim(L) \geq 3$.

4: $L \supseteq S_\alpha$. Se L avesse altre radici oltre a $\{\alpha, -\alpha\}$ allora avrebbe almeno altre due radici; diciamo β e $-\beta$. Impossibile perché $\dim(L)=4$. Allora H^* è generato da α, cioè H ha dim. 1, e $\dim(L)=3$: assurdo.

5, 7: $\dim(L) = \dim(H) + 2 \cdot (|\overset{\text{(scegliendo una base)}}{\Phi^+}|)$

e $\dim(H) \leq |\Phi^+|$, e se $|\Phi^+| = 1$, allora $\dim(H) = 1$.

allora $\underline{\dim(L) \geq 3 \dim(H)}$.

Possibili $\dim(H)$:

$\dim(H) = 1$: no perché allora $\dim(L) = 3$

$\dim(H) = 2$: no perché allora $\dim(L) =$ pari

$\dim(H) = 3$: no perché allora $\dim(L) \geq 3 \cdot \dim(H) = 9$.

<u>Es. 6</u>: $\dim(L) \geq 3 \dim(H)$: già visto

esempio con $=$ per ogni $\underline{\dim(H) = n \geq 1}$: $L = \underbrace{sl(2) \oplus \ldots \oplus sl(2)}_{n \text{ volte}}$

In questo caso le radici positive sono $\alpha_1, .., \alpha_n$ con α_i = la radice positiva dell'i-esima $sl(2)$, quindi ho tante radici positive quanto $\dim(H) = \dim(E)$, e allora qui $\Phi^+ = \Delta$, e tutte le radici semplici sono ortogonali.

Es.: Con $sl(n)$ si può fare lo stesso ragionam. visto per $sl(3)$, e si ottiene $W \cong S_n$ (il gruppo simmetrico). Una permutazione $\sigma \in S_n$ agisce su una radice $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ mandandola in $\varepsilon_{\sigma(i)} - \varepsilon_{\sigma(j)}$.

Le riflessioni corrispondono alle trasposizioni: $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ corrisp. a $(i\ j)$, e le riflessioni semplici corrisp. alle trasposizioni $(1\ 2), (2\ 3), .., (n\text{-}1\ n)$.

Dim. teorema della lezione prec.

Dato $\gamma \in E^{reg}$, cerchiamo σ = prodotto di riflessioni semplici, tale che $\sigma(\gamma) \in$ camera fondamentale, cioè la camera di Weyl tale che $\Delta(\omega) = \Delta$ per $\omega \in$ camera fondam. Ric. $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$.

Scegliamo σ prodotto di rifl. semplici tale che $(\delta, \sigma(\gamma))$ sia massimo.

Per $\alpha \in \Delta$ vale:

$$\underline{(\sigma(\gamma), \delta)} \geq (s_\alpha(\sigma(\gamma)), \delta) = (\sigma(\gamma), s_\alpha(\delta)) = \underline{(\sigma(\gamma), \delta)} - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

perché $(s_\alpha(-), s_\alpha(-)) = (-,-)$
e $s_\alpha^{-1} = s_\alpha$

Segue $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$, inoltre $(\sigma(\gamma), \alpha) = (\gamma, \underbrace{\sigma^{-1}(\alpha)}_{\in \Phi}) \neq 0$, cioè

$(\sigma(\gamma),\alpha)>0 \quad \forall \alpha\in\Delta$, allora $(\sigma(\gamma),\beta)>0 \ \forall\beta\in\Phi^+$, cioè

$\sigma(\gamma)\in$ camera fondamentale.

Quindi data una base qualsiasi, esiste σ come sopra che la manda in Δ,

e W agisce in modo transitivo sull'insieme delle basi di Φ.

Rimane da dim. che W è generato dalle riflessioni semplici, quindi consid.

$\beta\in\Phi^+$ e s_β. Per l'ultimo lemma visto, esiste una base Δ' che

contiene β, e considero $\sigma=$ prodotto di rifl. semplici tale che $\sigma(\Delta')=\Delta$.

Allora $\sigma(\beta)=\alpha\in\Delta$.

<u>Esercizio</u>: in questo caso $s_\alpha = \underline{\sigma\, s_\beta\, \sigma^{-1}}$.

Segue: $s_\beta=\sigma^{-1}s_\alpha\sigma$, cioè s_β è prodotto di riflessioni semplici.

$\square$

<u>Oss.</u>: Nello studio del gruppo simmetrico si introduce la <u>lunghezza</u> di un elem. $\sigma\in S_n$ come il numero minimo di trasp. del tipo $\underline{(1\ 2)}, \underline{(2\ 3)}, \ldots$ che servono per scrivere σ. Si dimostra che è uguale al numero di <u>inversioni</u> di σ, cioè al numero delle coppie (i,j) con $i<j$ tale che $\sigma(i)>\sigma(j)$.

Questo si generalizza ai gruppi di Weyl.

<u>Def.</u>: Dato $w\in W$, la <u>lunghezza</u> $\ell(w)$ di w è definita come

$\min\{t \mid w=s_1\cdots s_t,\ s_1,\ldots,s_t \text{ riflessioni semplici}\}$

Una scrittura di w del tipo $w = s_1 \cdots s_t$ con $t = \ell(w)$ è detta <u>scrittura</u> <u>ridotta</u> di w.

<u>Teorema:</u> $\forall w \in W$: $\ell(w) = |\{ \alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) < 0 \}|$

Per la dim.:

<u>Lemma:</u> Sia $w \in W$, e sia $w = \overset{\downarrow}{s_1} \cdots \overset{\downarrow}{s_t}$ un'espressione di w come prodotto di riflessioni semplici: $s_i = s_{\alpha_i}$ per $\alpha_i \in \Delta$. Consid. α_t e supponiamo che $w(\alpha_t) > 0$. Allora esiste $i \in \{1, .., t-1\}$ tale che

$$w = s_1 \cdots s_{i-1} \cdot s_{i+1} \cdots s_{t-1} .$$

<u>Dim.:</u> Abb. $s_t(\alpha_t) < 0$, $s_{t-1} s_t(\alpha_t)\ ?$, ..., $s_2 \cdots s_t(\alpha_t)\ ?$, $w(\alpha_t) > 0$.

C'è (almeno) un indice i tale che $s_{i+1} \cdots s_t(\alpha_t) < 0$, e $\beta = s_i s_{i+1} \cdots s_t(\alpha_t) > 0$. Cioè $s_i(\beta) < 0$. Ma l'unica radice positiva che cambia segno con s_i è α_i, cioè $\beta = \alpha_i$. Allora:

$$\underbrace{s_{i+1} \cdots s_t}_{\sigma} (\alpha_t) = -\alpha_i \qquad \text{Per l'esercizio dato prima abb.}$$

$$\underbrace{\sigma s_t \sigma^{-1}} = s_{-\alpha_i} = s_{\alpha_i} = s_i$$

Sostituiamo allora s_i nell'espressione di w:

$$w = s_1 \cdots s_{i-1} s_i s_{i+1} \cdots s_t = (s_1 \cdots s_{i-1}) \underbrace{\overbrace{(s_{i+1} \cdots s_t)}^{\sigma} \cancel{s_t} \overbrace{(\cancel{s_t} \cancel{s_{t-1}} \cdots \cancel{s_{i+1}})}^{\sigma^{-1}}}_{s_i} \cdot$$

$$\cdot (\cancel{s_{i+1}} \cdots \cancel{\cdot} s_t) =$$

$$= (s_1 \cdots s_{i-1})(s_{i+1} \cdots \cancel{s_t}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{viene dalla fine di } w}}{\cancel{s_t}} = s_1 \cdots s_{i-1} \cdot s_{i+1} \cdots s_{t-1}.$$

$\square$

<u>Corollario:</u> Se $w = s_1 \cdots s_t$ è una scrittura ridotta, allora $w(\alpha_t) < 0$.