TOKEN: 872850

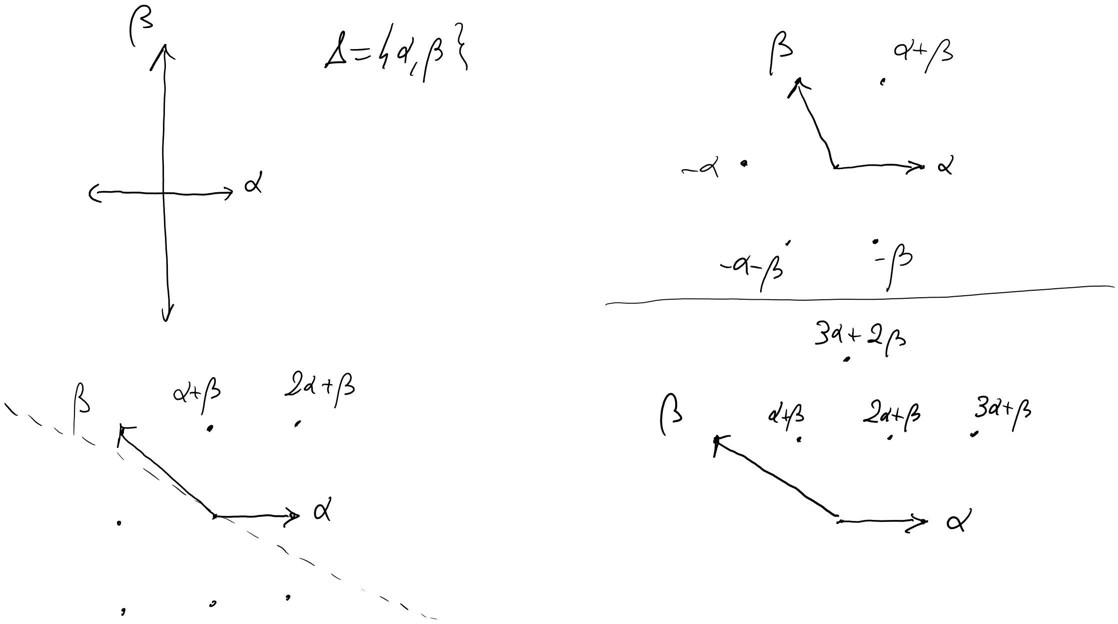
Basi di sistemi di radici

Def.: Sia $\Phi \subseteq E$ sistema di radici come al solito, sia $\Delta \subseteq \Phi$.

Δ è una <u>base</u> di Φ se:

1) Δ è una base di E
2) $\forall \alpha \in \Phi$: i coeff. di α rispetto alla base Δ di E sono tutti ≥ 0 oppure ≤ 0.

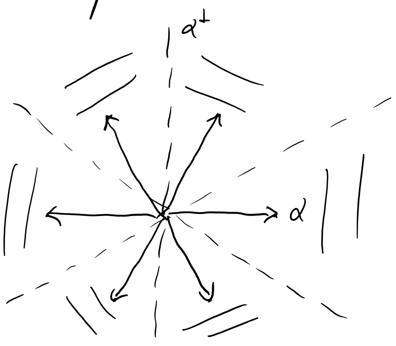
Es.:



Def.: 1) Definiamo $\underline{E^{reg}} = E \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^{\perp} \right)$ iperpiano ortog. ad α. I suoi vettori si dicono <u>regolari</u>.

2) Le componenti connesse di E^{reg} si chiamano <u>camere di Weyl</u>.

Es.:



qui abb. 6 camere di Weyl.

3) Se $\gamma \in E^{reg}$, definiamo

$$\Phi^+(\gamma) = \{ \alpha \in \Phi \mid (\alpha, \gamma) > 0 \}, \text{ analogam. } \Phi^-(\gamma),$$

e ovviam. $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma)$ (unione disgiunta).

e definiamo

$$\Delta(\gamma) = \{ \alpha \in \Phi^+(\gamma) \mid \alpha \text{ è indecomponibile in } \Phi^+(\gamma), \text{ cioè } \alpha \text{ non si può scrivere come } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+(\gamma) \}$$

<u>Prop.</u>: Sia $\Delta \subseteq \Phi$ base, allora esiste $\gamma \in E^{reg} \mid \Delta = \Delta(\gamma)$.

<u>Dim.</u>: 1) A posteriori avremo $(\alpha, \gamma) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta$, scegliamo allora $\gamma \in E$ che soddisfa $(\alpha, \gamma) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta$ (esistenza di γ: esercizio).

2) Dim. che $\gamma \in E^{reg}$, infatti se avessi $(\gamma, \beta) = 0$ per $\beta \in \Phi$, scriviamo $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$, tutti ≥ 0 opp. tutti ≤ 0.

Poss. assumere $c_\alpha \geq 0 \ \forall \alpha$ (eventualm. scambiando β con $-\beta$). Allora:

$$0 = (\gamma, \beta) = \Big(\gamma, \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha\Big) = \sum_{\alpha \in \Delta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tutti } \geq 0, \\ \text{almeno uno} \\ \text{è } > 0}}{c_\alpha} \underbrace{(\gamma, \alpha)}_{> 0} > 0 \quad \text{: assurdo.}$$

3) Segue: $\Phi^+ = \{$radici che si scrivono con coeff. ≥ 0 in termini di $\Delta\}$ è contenuto in $\Phi^+(\gamma)$. Analogam. $\Phi^- \subseteq \Phi^-(\gamma)$.

D'altronde $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^- = \Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma)$, da questo

$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma), \qquad \Phi^- = \Phi^-(\gamma).$

4) Dim. che $\Delta \subseteq \underline{\Delta(\gamma)}$, cioè che ogni $\alpha \in \Delta$ è indecomponibile.

Infatti α è indecomponibile in Φ^+, quindi α è indecomp. in $\Phi^+(\gamma)$ e allora $\alpha \in \Delta(\gamma)$.

5) Dim. che $\Delta(\gamma)$ è linearmente indipendente.

a) Dim. che $\boxed{(\alpha,\beta) \leq 0}$ $\forall \alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$; se avessi $(\alpha,\beta)>0$ allora $\alpha-\beta$, $\beta-\alpha \in \Phi$, una di esse sarebbe in $\Phi^+(\gamma)$, ad es. $\alpha-\beta \in \Phi^+(\gamma)$:

allora $\alpha = \underbrace{(\alpha-\beta)}_{\in \Phi^+(\gamma)} + \underset{\Phi^+(\gamma)}{\underset{\cap}{\beta}}$ assurdo

b) Sia $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} c_\alpha \alpha = 0$ con $c_\alpha \in \mathbb{R}$, scriviamo:

$$\sum_{c_\alpha \geq 0} c_\alpha \alpha = \sum_{c_\beta \leq 0} (-c_\beta)\beta = \omega$$

Allora $(\omega,\omega) = \left(\sum_{c_\alpha \geq 0} c_\alpha \alpha, \sum_{c_\beta \leq 0} (-c_\beta)\beta\right) = \sum_{\substack{\alpha \mid c_\alpha \geq 0 \\ \beta \mid c_\beta \leq 0 \\ \alpha \neq \beta}} \overset{\geq 0}{\widetilde{c_\alpha}} \overbrace{(-c_\beta)}^{\geq 0} \overbrace{(\alpha,\beta)}^{\leq 0} \leq 0$

Cioè $\omega = 0$. Infine:

$$0 = (\gamma, \omega) = \sum_{c_\alpha \geq 0} \underset{0}{\underset{\geq}{c_\alpha}} \underset{0}{\underset{>}{(\gamma,\alpha)}} = \sum_{c_\beta \leq 0} \underbrace{(-c_\beta)}_{\substack{\geq \\ 0}} \underbrace{(\gamma,\beta)}_{\substack{> \\ 0}}$$

da cui $c_\alpha = 0$ $\forall \alpha \in \Delta(\gamma)$. Cioè $\Delta(\gamma)$ è lin. indip., e allora

$\Delta = \Delta(\gamma)$.

$\square$

Viceversa, vale:

<u>Prop.</u>: Se $\gamma \in E^{reg}$ allora $\Delta(\gamma)$ è una base.

<u>Dim.</u>: Sappiamo già che $\Delta(\gamma)$ è lin. indipendente, per dim. che è base di Φ basta verificare che ogni $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ si scrive come comb. lin. di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff. tutti ≥ 0.

Supponiamo $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ non soddisfi questa proprietà, in particolare $\alpha \notin \Delta(\gamma)$ (altrim. avrei la comb. lin. $\alpha = 1 \cdot \alpha$). Allora α è decomponibile:

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+(\gamma)$.

Possiamo assumere (γ, α) minimo (>0) fra gli α che non soddisfano quella proprietà. Visto che $(\alpha_1, \gamma) < (\alpha, \gamma)$ e $(\alpha_2, \gamma) < (\alpha, \gamma)$, abb.:

α_i si scrive come comb. lin di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff. ≥ 0.

Allora ho scritto anche α: assurdo.

Segue: ogni elem. di $\Phi^-(\gamma)$ si scrive come comb lin. di elem. di $\Delta(\gamma)$ a coeff ≤ 0. Cioè $\Delta(\gamma)$ è una base.

$\square$

<u>Corollario</u>: Esistono basi di Φ.

<u>Dim.</u>: $E^{reg} \neq \emptyset$ (dim.: esercizio).

$\square$

Corollario (della dim. della 1ª prop.) Se Δ è una base e $\alpha, \beta \in \Delta$ sono distinte, allora $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Corollario: {camere di Weyl} è in biiezione con {basi di Φ} tramite

$$C \longmapsto \Delta(\gamma) \quad \text{con } \gamma \in C$$

$\uparrow$ camera di Weyl

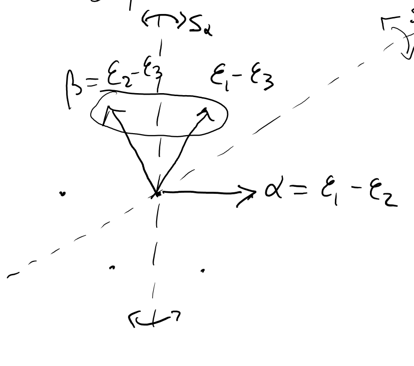
Gruppo di Weyl

Def: 1) Data $\Delta \subseteq \Phi$ base di Φ, gli elem. di Δ si chiamano radici semplici, e le riflessioni s_α con $\alpha \in \Delta$ si chiamano riflessioni semplici.

2) Definiamo $W \subseteq GL(E)$ come il sottogruppo generato da s_β per ogni $\beta \in \Phi$.

Oss.: In realtà W è un sottogr. di $O(E)$. Inoltre Φ è stabile per W, e se un elem. $w \in W$ fissa ogni elem. di Φ allora fissa gli elem. di una base di E, cioè $w = Id_E$. In altre parole $W \hookrightarrow S_\Phi =$ gruppo simm. di Φ, e allora W è un gruppo finito.

Es.: $\Phi =$



($(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ = base canonica di $\mathbb{R}^3$, E = iperpiano di eq. $x+y+z=0$)

$$\Phi = \{\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \pm(\varepsilon_2-\varepsilon_3), \pm(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i\neq j\}$$

Possiamo vedere W dentro S_3, pensando $\sigma \in W$ corrisp. a una permutazione, e

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{elem. di} \\ W\subseteq GL(E)}}{\sigma}(\varepsilon_i-\varepsilon_j) = \varepsilon_{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{elem. pensato} \\ \text{in } S_3}}{\sigma(i)}} - \varepsilon_{\sigma(j)}$$

Si verifica facilmente che questo identifica W con un sottogr. di S_3,

s_α corrisp. alla trasp. $(1\ 2)\in S_3$, $\leftarrow$

s_β — , — $(2\ 3)\in S_3$ $\leftarrow$ } riflessioni semplici, generano S_3

$s_{\alpha+\beta}$ — , — $(1\ 3)\in S_3$

Allora in questo caso $W = S_3$.

<u>Lemma</u>: Sia $\alpha\in\Delta$ e consid. $s_\alpha \in W$. Sappiamo: $\underline{s_\alpha(\alpha) = -\alpha \in \Phi^-}$, ma $s_\alpha(\beta)\in\Phi^+$ $\forall \beta\in\Phi^+\setminus\{\alpha\}$. Cioè s_α stabilizza („permuta") $\Phi^+\setminus\{\alpha\}$.

<u>Notazione</u>: Scriviamo $\alpha > 0$ per una $\alpha\in\Phi$ se $\alpha\in\Phi^+$, e $\alpha<0$ se $\alpha\in\Phi^-$.

<u>Dim.</u>: Sia $\beta>0$, $\beta\neq\alpha$, scriviamo $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma$, $c_\gamma \geq 0$ $\forall\gamma$.

Visto che β non è α né un multiplo di α, abb. $\exists \gamma_0 \in \Delta\setminus\{\alpha\}$ tale che $c_{\gamma_0}\neq 0$. Allora:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha = \overbrace{\left(c_\alpha - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle\right)}^{\geq ?}\alpha + \overset{>0}{c_{\gamma_0}}\gamma_0 + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha, \gamma_0\}} c_\gamma \gamma$$

Almeno un coeff. è >0, e allora $s_\alpha(\beta) > 0$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Sia $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$. Vale $s_\alpha(\delta) = \delta - \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$.

<u>Dim.</u>: Abb.:
$$\delta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta$$

$$s_\alpha(\delta) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} s_\alpha(\beta) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta = \delta - \alpha.$$

perché s_α stabilizza $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$

$\square$

<u>Teorema</u>: W è generato dalle riflessioni semplici, cioè da s_α con $\alpha \in \Delta$.
Inoltre W agisce in modo <u>transitivo</u> sulle basi.

<u>Oss.</u>: Chiaram. $\sigma(\Delta)$ è una base, se $\sigma \in W$ e Δ è una base.

<u>Per la dim.</u>:

Lemma: Data $\beta \in \Phi$, esiste una base Δ di Φ che contiene β.

Dim.: Iniziamo con $\gamma_0 \in E$ tale che $(\beta, \gamma_0) = 0$, e $(\beta, \alpha) \neq 0$ $\forall \alpha \in \Phi \setminus \{\beta, -\beta\}$. (Un tale γ_0 esiste: esercizio, suggerimento: completare β a una <u>base di E</u> (non di Φ) e usare l'algebra lineare.)

Allora per $\varepsilon \in \mathbb{R}$, consid. $\gamma_0 + \varepsilon\beta$. Abb.:

$$(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta) = \varepsilon \cdot \|\beta\|^2$$

$$(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \alpha) = \underbrace{(\gamma_0, \alpha)}_{\neq 0} + \varepsilon \underline{(\beta, \alpha)} \qquad \alpha \in \Phi^+ \setminus \{\beta, -\beta\}$$

Per $\varepsilon > 0$ abb. piccolo, abb. $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta) > 0$, $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \alpha) \neq 0$ e $(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \beta) < |(\gamma_0 + \varepsilon\beta, \alpha)|$. Allora $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\beta$ è regolare, e β è in $\Phi^+(\gamma)$ ed è indecomp. per minimalità del suo prod. scalare con γ. Allora $\beta \in \Delta(\gamma)$.

$\square$