TOKEN: 820991

Ricevimento questa settimana: giovedì 17-18 (online e in presenza) + venerdì.

Ricordiamo:

<u>Teorema:</u> $\underline{K(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}}$ $\forall \alpha,\beta\in\Phi$, e K induce allora

$$E_{\mathbb{Q}}\times E_{\mathbb{Q}}\longrightarrow \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}\text{-bilineare} \qquad \text{e}$$

$$E\times E\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}\text{-bilineare}, \qquad \text{e qui è}$$

un <u>prodotto scalare</u>. (Inoltre ... proprietà 1), ... 4)).

<u>Dim.:</u> Scegliamo una base di L: $(\underbrace{h_1,\dots,h_\ell}_{\text{base di } H}, x_1,\dots,x_m)$ tali che

$(h_1,\dots,h_\ell)=$ base di H,

$x_i\in L_{\alpha_i}\setminus\{0\}$ e $\Phi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$

Calcoliamo $K(\lambda,\mu)$ per $\lambda,\mu\in H^*$:

$$K(\lambda,\mu)=K(t_\lambda,t_\mu)=tr\left(ad(t_\lambda)ad(t_\mu)\right)$$

Usiamo la matrice di $ad(t_\lambda)$ in questa base:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \alpha_1(t_\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_m(t_\lambda) \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{[t_\lambda, h_i]=0}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\uparrow}$

x_i sono $ad(H)$-autovettori

allora $$tr\left(ad(t_\lambda)ad(t_\mu)\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t_\lambda)\alpha_i(t_\mu)=\sum_{i=1}^{m}\overbrace{K(\alpha_i,\lambda)}^{K(t_{\alpha_i},t_\lambda)}K(\alpha_i,\mu)$$

In particolare

$$K(\lambda,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} K(\alpha_i,\lambda)^2 \longleftarrow$$

Per $\beta \in \Phi$: $\quad K(\beta,\beta) = \sum_{i=1}^{m} K(\alpha_i,\beta)^2$

allora $\underbrace{\dfrac{1}{K(\beta,\beta)}} = \sum_{i=1}^{m} \Big(\underbrace{\dfrac{K(\alpha_i,\beta)}{K(\beta,\beta)}}_{\in \mathbb{Q}} \Big)^2$

da cui segue $K(\beta,\beta) \in \mathbb{Q}$. Quindi $K(\beta,\alpha) = \underbrace{\dfrac{K(\beta,\alpha)}{K(\beta,\beta)}}_{\in \mathbb{Q}} \overbrace{K(\beta,\beta)}^{\in \mathbb{Q}}$

è in $\mathbb{Q}$ $\forall \alpha \in \Phi$.

Dalla formula per $K(\lambda,\lambda)$ otteniamo anche: $K(\lambda,\lambda) \in \mathbb{Q}$ e

$K(\lambda,\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$.

Visto che Φ contiene una base di $E_{\mathbb{Q}}$ allora se $\lambda \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$

è $\neq 0$ allora $K(\lambda,\lambda) > 0$.

Segue: $K|_{E\times E}$ è def. positiva perché ha la stessa matrice di

$K|_{E_{\mathbb{Q}}\times E_{\mathbb{Q}}}$ (scegliendo come base di E e di $E_{\mathbb{Q}}$ lo stesso sottoinsieme di Φ).

$\square$

Sistemi di radici

Sia E sp. vettoriale su $\mathbb{R}$, euclideo, con prodotto scalare $(-,-)$.

<u>Def.</u>: Un sottoinsieme finito $\Phi \subseteq E$ si dice <u>sistema di radici</u> se valgono le proprietà 1), .., 4) del teorema.

D'ora in poi Φ è un sistema di radici.

<u>Def</u>: Dato $\underline{\alpha \in \Phi}$, definiamo
$$\underline{\alpha^\vee}: E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta \longmapsto \frac{2(\beta,\alpha)}{\underline{(\alpha,\alpha)}},$$
cioè $\alpha^\vee \in E^*$.

Poniamo anche
$$S_\alpha : E \longrightarrow E$$
$$\beta \longmapsto \beta - \underbrace{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}_{} \alpha$$
notazione per $\alpha^\vee(\beta) = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$

<u>Oss.</u>: 1) $\alpha^\vee$ è lineare in β ma $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ non è un'applicaz. lineare perché non è definita in 0, e anche $(\alpha+\beta)^\vee \neq \alpha^\vee + \beta^\vee$ in generale.

2) Come abb. visto, $S_\alpha(\beta)$ è il „riflesso" di β rispetto all'iperpiano ortogonale ad α.

<u>Esempi</u>: L'esagono regolare e gli 8 punti sul quadrato (già visti) sono sistemi di radici.

Vediamo i possibili valori di $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ con $\alpha, \beta \in \Phi$:
$$0 \leq C = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \cdot \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 4 \underbrace{\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \cdot \frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}}_{= \cos^2(\vartheta)} \leq 1 \quad \text{per Cauchy-Schwarz}$$
angolo fra α e β

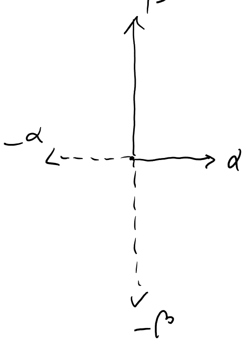
Possibilità: supponiamo α, β non proporzionali, supp. $(\alpha, \beta) \geq 0$, supp. $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$

(allora $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \geq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$, $\dfrac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = \dfrac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$) ← se $\neq 0$

C	$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$	θ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$	$\|\alpha\| \overset{?}{=} \|\beta\|$
0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	?	?
1	1	1	$\frac{\pi}{3}$	1	si
2	2	1	$\frac{\pi}{4}$	2	no
3	3	1	$\frac{\pi}{6}$	3	no
~~4~~	~~4~~	~~1~~	~~0~~ ← $\alpha\beta$ non proporzionali		

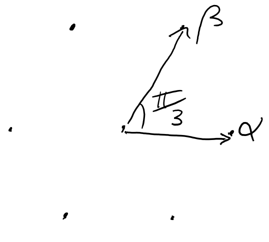
Queste 4 possibilità si verificano tutte:

$\underline{C=0}$

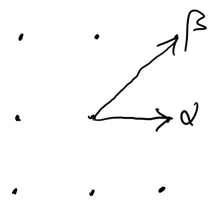


per α, β ortogonali di lungh. qualsiasi $\neq 0$
$\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\} = \Phi$ è un sist. di radici
di E di dim. 2

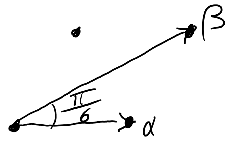
$\underline{C=1}$ $\Phi = \{$vertici di un esagono regolare$\}$

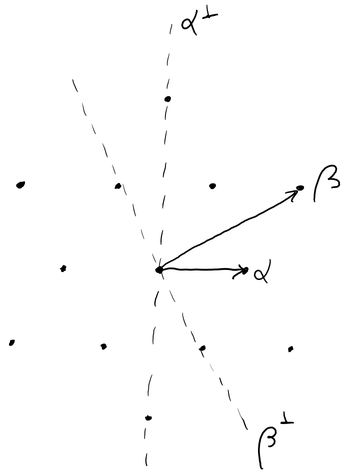


$\underline{C=2}$ $\Phi = \{$8 punti in un quadrato$\}$



$C=3$ | $\Phi = \{$vertici di due esagoni regolari$\}$





Questi sono tutti e soli i sistemi di radici nel piano (si parte da $\alpha, \beta \in \Phi$ con angolo più piccolo possibile non nullo, a seconda dei casi Φ deve contenere almeno i punti che ho disegnato, e non può contenerne altri a causa della minimalità dell'angolo e dell'assioma di integralità, il 4°).

<u>Lemma:</u> Siano α, β non proporzionali. Se $(\alpha, \beta) > 0$ allora $\alpha - \beta \in \Phi$, e se $(\alpha, \beta) < 0$, allora $\alpha + \beta \in \Phi$.

<u>Oss.:</u> Se $(\alpha, \beta) = 0$ allora $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ potrebbero essere radici oppure no.

<u>Dim.:</u> La seconda affermazione deriva dalla prima (scambiando β con $-\beta$), dimostriamo la prima. Sia allora $(\alpha, \beta) > 0$.

Allora $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle > 0$, e sappiamo dalla tabella che

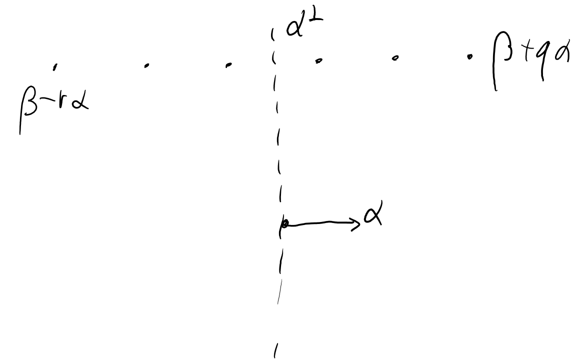
$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 1$, e allora $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha = \beta - \alpha \in \Phi$ e allora $\alpha - \beta \in \Phi$

<u>OPPURE</u>

$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 1$, e allora ... $\alpha - \beta \in \Phi$. $\square$

Corollario: Se $\alpha, \beta \in \Phi$ sono non proporzionali, siano $r, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ massimi tali che $\beta - r\alpha \in \Phi$ e $\beta + q\alpha \in \Phi$. Allora $\beta - r\alpha, \beta - (r-1)\alpha, \dots, \beta + (q-1)\alpha, \beta + q\alpha \in \Phi$, e $r - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$

Dim.:



Sappiamo che

$$s_\alpha(\beta - r\alpha) = \beta - r\alpha - \langle \beta - r\alpha, \alpha^\vee \rangle \alpha$$
$$= \beta + (-r - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2r)\alpha =$$
$$= \beta + (r - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle)\alpha \text{ è una radice}$$

e per massimalità deve essere $\beta + q\alpha$.

Se $r = 0$, $q = 0$ allora c'è solo β ed è ortogonale ad α abb. finito.

Altrimenti, se $(\alpha, \beta + q\alpha) > 0$, allora $(\beta + q\alpha) - \alpha$ è una radice per il lemma. Andando avanti, sono radici tutti i vettori del tipo $\beta + i\alpha$ con $(\beta + i\alpha, \alpha) \geq 0$ $(i \in \mathbb{Z})$

Se $(\alpha, \beta - r\alpha) < 0$ ottengo analogamente che sono radici tutti i vettori della „stringa" del tipo $\beta + i\alpha$ con $(\beta + i\alpha, \alpha) \leq 0$ $(i \in \mathbb{Z})$.

$\square$