TOKEN 402675

Esercizi del foglio n. 6

<u>Es. 1</u>: $V = \mathfrak{sl}(2)$-modulo irriduc. V di dim. 2 e $W = \mathfrak{sl}(2)$-modulo irriduc. di dim. 3. $V \otimes W$: trovare gli h-autovalori e autovettori, dim. autospazi, decomp. in irriducibili.

<u>Svolgimento</u>: Notazione V(peso più alto) per gli $\mathfrak{sl}(2)$-moduli irrid., cioè

$$V = V(1), \quad W = V(2).$$

Base di h autovettori di V: v_1, v_{-1} (Come indice c'è l'h-peso)

— " — W: w_2, w_0, w_{-2}

Base di $U = V \otimes W$: tutti h-autovettori

$$\begin{array}{lll}
v_1 \otimes w_2 & \leftarrow \text{peso} & 2+1=3 \\
v_1 \otimes w_0 & \text{— " —} & 1 \\
v_1 \otimes w_{-2} & & -1 \\
v_{-1} \otimes w_2 & & 1 \\
v_{-1} \otimes w_0 & & -1 \\
v_{-1} \otimes w_{-2} & & -3
\end{array}$$

U_3 ha dim. 1, U_1 ha dim. 2, U_{-1} ha dim. 2, U_{-3} ha dim. 1, e abb. trovato basi di ciascuno.

Il numero di addendi in una decomp. in irriducibili è $\dim(U_0) + \dim(U_1) = 0 + 2 = 2$

Il peso più alto in assoluto è 3, quindi $V(3) \subseteq U$, e dalle dimensioni degli autospazi segue che l'altro addendo è $V(1)$.

Es. 2: $L = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\mathfrak{sl}(2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \subseteq \mathfrak{sl}(3)$ 1) $L \cong \mathfrak{sl}(2)$.

2) Scrivere $\mathfrak{sl}(3)$ esplicitam. come somma diretta di $\mathfrak{sl}(2)$-moduli tramite ad.

Uno degli addendi è sicuramente L, perché è una sottoalgebra di Lie, è irriducibile perché L è semplice. D'altronde $L \cong V(2)$

Altro L-sottomodulo: $\left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; x, y \in k \right\}$

infatti $\left[\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \right] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A\binom{x}{y} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Questo sottomodulo è isomorfo a k^2 con azione naturale di $\mathfrak{sl}(2)$, peso più alto 1, cioè il sottom. è $\cong V(1)$

In modo simile:

$\left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline u & v & 0 \end{array}\right) \right\}$ è un L-sottomodulo

ed è isomorfo anch'esso a $V(1)$.

Ultimo addendo: $\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & -2t \end{pmatrix} \right\}$ ha dim. 1 e $\mathfrak{sl}(2)$ agisce mandando tutti i vettori in 0, cioè il sottomodulo è $V(0)$.

Es. 3: L algebra di Lie, $b: L \times L \to k$ forma bilineare, corrisp. a $f: L \otimes L \to k$ (cioè $f(v \otimes w) = b(v, w)$).

Vedo $L \otimes L$ come L-modulo (tramite ad) e anche

$(L\otimes L)^*$, che contiene f. Dim.: b è associativa $\iff$

$x.f = 0 \quad \forall x \in L$.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{questa az.} \\ \text{su } (L\otimes L)^*}}{.}$

<u>Svolgim.:</u> Scriviamo $(\underset{\substack{\uparrow\\ L}}{x}.f)(\underset{\substack{\uparrow\\ L}}{v}\otimes \underset{\substack{\uparrow\\ L}}{w}) = f((-x).(v\otimes w)) =$

$$= f\Big(\big((-x)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{bracket}}}{.}v\big)\otimes w + v\otimes\big((-x).w\big)\Big) =$$

$$= -f([x,v]\otimes w) - f(v\otimes [x,w]) =$$

$$= -b([x,v],w) - b(v,[x,w]) = b([v,x],w) - b(v,[x,w])$$

E' $=0$ $\forall x,v,w \in L$ se e solo se b è associativa.

<u>Es. 4:</u> Il punto è: per $L = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n, J_0)$, $\mathfrak{sp}(2n, J_1)$

data $H = L \cap \{\text{matr. diagonali}\}$, allora H è una sottoalgebra

torale, e posso anche scrivere $L = H \oplus \bigoplus_\alpha L_\alpha$

H autospazi di dim. 1 ciascuno, l'autovalore rispetto a H non è il funzionale nullo

Da questo segue che se $K \supsetneq H$ è una sottoalg.

di L, allora K non è abeliana, quindi H è torale massimale.

K non è abeliana perché contiene vettori con componenti non nulle in qualche

L_α, e allora facendo il bracket con H le comp. si riscalano non banalmente se scegliamo l'elem. di H non nel $\ker(\alpha)$.

La decomp. di L si trova direttamente, osservando che

$$so(n, J_0) = \{ A \in gl(n) \mid A \text{ antisimmetrica rispetto alla diagonale secondaria} \}$$

<u>Es. 5</u>: $H = sl(2) \cap h(2)$, $H' \subseteq sl(2)$ sottoalgebra torale $\neq \{0\}$.

Dim. che $\exists g \in GL(2) \mid g H' g^{-1} = H$

<u>Svolgim.</u>: Scegliamo $x \in H' \setminus \{0\}$, e $g \in GL(2)$ tale che $g x g^{-1} \in h(2)$

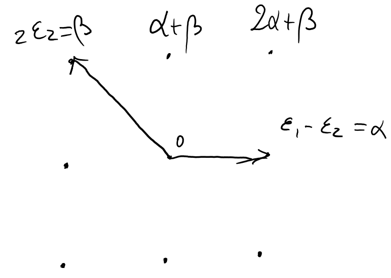
e $tr(g x g^{-1}) = tr(x) = 0$, quindi $g x g^{-1} \in H$, cioè

$g H' g^{-1} \supseteq H$ e $g H' g^{-1}$ è fatta di elem. semisemplici.

Dalla teoria: $g H' g^{-1}$ è abeliana.

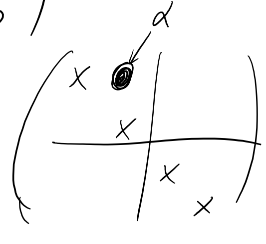
Dall'es. precedente: $g H' g^{-1} = H$.

<u>Esempio</u>: $L = sp(4)$ $\qquad H = sp(4) \cap h(4) = \begin{pmatrix} \xi_1 & & & 0 \\ & \xi_2 & & \\ & & -\xi_2 & \\ 0 & & & -\xi_1 \end{pmatrix}$

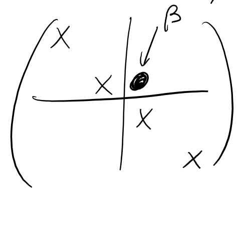


$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\ z_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{base di } H$$

$\varepsilon_i \in H^*$ $\quad \varepsilon_i(z_j) = \delta_{ij}$, $\quad \alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$



$\beta = 2\varepsilon_2$



radici: $\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta$, i loro opposti. Dato $z \in H$:

la matrice di $ad(z)$ rispetto a una base di L formata da

$z_1, z_2, e_\alpha, e_{\alpha+\beta}, \ldots$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \alpha(z) & & & & \\ & & & \beta(z) & & & \\ & & & & (\alpha+\beta)(z) & & \\ & & & & & (2\alpha+\beta)(z) & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$ad(z_1) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la matr. diagonale} \\ \text{con queste entrate sulla diagonale}}}{diag}(0, 0, 1, 0, 1, 2, -1, 0, -1, 2)$$

$$ad(z_2) = diag(0, 0, -1, 2, 1, 0, 1, -2, -1, 0)$$

Abbiamo $\alpha(\underbrace{az_1 + bz_2}_{\text{elem. qualsiasi di } H}) = a - b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } t_\alpha}}{=} K(t_\alpha, az_1 + bz_2)$

$$\beta(az_1 + bz_2) = 2b = K(t_\beta, az_1 + bz_2)$$

per trovare t_α, t_β, calcoliamo

$$K(z_1, z_1) = 12, \qquad K(z_1, z_2) = 0, \qquad K(z_2, z_2) = 12$$

Segue: $t_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & & & \\ & \frac{-1}{12} & & \\ & & \frac{1}{12} & \\ & & & \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$, $\quad t_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{6} & & \\ & & \frac{-1}{6} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha(t_\alpha) = \frac{1}{6} \qquad \beta(t_\beta) = \frac{1}{3}, \qquad h_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha(t_\alpha)$ $\shortparallel$ $K(t_\alpha, t_\alpha) = K(\alpha, \alpha)$

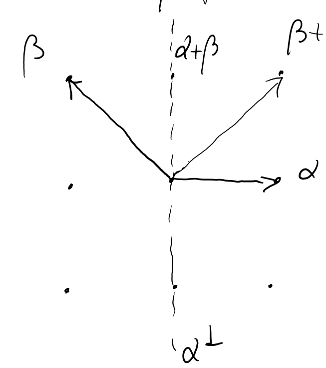
$$h_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si confermano $\alpha(h_\alpha)=2$, $\beta(h_\beta)=2$, $\beta(h_\alpha)=-2$, $\alpha(h_\beta)=-1$

Oss.: $\beta-\beta(h_\alpha)\alpha=\beta+2\alpha$ è una radice

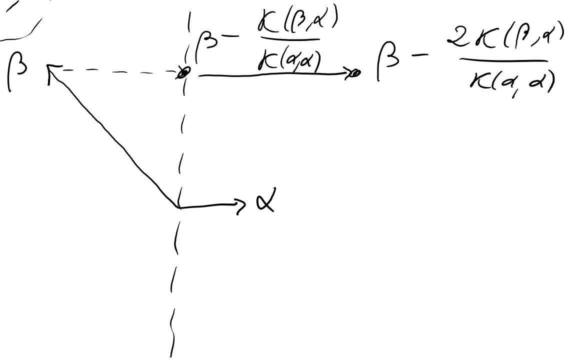
$\alpha-\alpha(h_\beta)\beta=\alpha+\beta$ è una radice

$\beta+2\alpha$ = „riflesso" di β rispetto a $\alpha^\perp$.



In generale $\beta(h_\alpha)=\dfrac{2K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}$, e

$$\beta-\frac{2K(\beta,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}\alpha = \text{riflesso di } \beta \text{ rispetto a } \alpha^\perp$$



Sia L in generale algebra di Lie semisemplice, $H\subseteq L$ sottoalgebra torale massimale, scegliamo $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\Phi$ che formano una base di H^*.

<u>Lemma:</u> $\Phi\subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.

<u>Dim.:</u> Sia $\alpha\in\Phi$ e scriviamo $\alpha=c_1\alpha_1+\dots+c_n\alpha_n$ con $c_i\in k$.

Data α_j con $j\in\{1,\dots,n\}$ qualsiasi, calcoliamo $\dfrac{2K(-,\alpha_j)}{K(\alpha_j,\alpha_j)}$:

$$\underbrace{\frac{2K(\alpha,\alpha_j)}{K(\alpha_j,\alpha_j)}}_{\in\mathbb{Q}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{2K(\alpha_i,\alpha_j)}{K(\alpha_j,\alpha_j)}}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\boxed{c_i}}_{k}$$

Per ogni j, gli elem. $c_1,\dots,c_n$ sono soluzioni di questa eq. lineare non omogenea a coeff. in $\mathbb{Q}$.

Si ottiene un sistema di eq. lineari con matrice dei coeff. $\left(\frac{2K(\alpha_i,\alpha_j)}{K(\alpha_j,\alpha_j)}\right)_{i,j}$ ottenuta dalla matrice $(K(\alpha_i,\alpha_j))_{i,j}$ riscalando ogni colonna per $\frac{2}{K(\alpha_j,\alpha_j)}\neq 0$. Quindi la matrice dei coeff. del sistema è invertibile e l'unica soluzione è in $\mathbb{Q}^n$. $\square$

<u>Def</u>: Date L, H, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ come prima, definiamo

$$E_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \quad (\subseteq H^*)$$

e

$$E = \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$$

(cioè il prodotto tensoriale fra $\mathbb{R}$ e $E_{\mathbb{Q}}$ come spazi vettoriali <u>su $\mathbb{Q}$</u>)

Con questa definizione, E è naturalmente uno spazio vettoriale <u>reale</u> di dim. n, e base $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dove identifico α_i e $1\otimes_{\mathbb{Q}}\alpha_i$.

Teorema: $\forall \alpha, \beta \in \Phi$: $K(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}$. Quindi K induce una forma $\mathbb{Q}$-bilineare $E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$ e quindi anche una forma $\mathbb{R}$-bilineare $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Quest'ultima è un prodotto scalare, con cui E è uno spazio euclideo. Denotiamo la forma con $(-,-)$. Valgono inoltre:

1) Φ genera E (come sp. vett. su $\mathbb{R}$) e $0 \notin \Phi$
2) $\forall \alpha \in \Phi$: $\mathbb{Z}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$
3) $\forall \alpha, \beta \in \Phi$: $\alpha - \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\beta \in \Phi$
4) — " — $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$