TOKEN: 3137281

Ricordiamo: L = alg. di Lie semisemplice, H = sottoalgebra torale massimale.

Usiamo K per identificare H^* con H:

$$t : H^* \longrightarrow H$$
$$\alpha \longmapsto t_\alpha = \text{l'elem. di } H \text{ tale che } \alpha(-) = K(t_\alpha, -)$$

Questo permette di definire K anche su H^*, ponendo

$$K(\alpha, \beta) = K(t_\alpha, t_\beta)$$

Proposizione: 1) Φ genera H^* (ric. $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$

Φ è def. in modo che $L_\alpha \neq \{0\} \Leftrightarrow \alpha \in \Phi$

e inoltre $\Phi \not\ni 0$)

Per ogni $\alpha \in \Phi$ valgono:

2) $-\alpha \in \Phi$

3) $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = k\, t_\alpha$, più precisamente $\forall x \in L_\alpha$, $\forall y \in L_{-\alpha}$:

$[x, y] = K(x, y)\, t_\alpha$

4) $\alpha(t_\alpha) \neq 0$ (ric. $\alpha(t_\alpha) = K(\alpha, \alpha)$)

5) $\forall e_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, $\exists f_\alpha \in L_{-\alpha}$ t.c.

$$\begin{aligned} e_\alpha &\longmapsto e \\ f_\alpha &\longmapsto f \\ h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] &\longmapsto h \end{aligned}$$

è un isomorfismo di algebre di Lie $\text{Span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2)$.

6) Qualsiasi sia e_α del punto 5), abbiamo

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{K(\alpha,\alpha)}, \quad \text{inoltre} \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}, \quad e \quad \alpha(h_\alpha)=2.$$

Dim.: 1) Consideriamo $\mathrm{Span}\,\Phi \subseteq H^*$, sia $(\alpha_1, .., \alpha_m)$ base di $\mathrm{Span}\,\Phi$ fatta di elem. di Φ. Sia $\underline{\underline{h}} \in \underbrace{\ker(\alpha_1) \cap .. \cap \ker(\alpha_m)}$

$\uparrow$ ha dim. $=\dim H^* - \dim \mathrm{Span}\,\Phi$.

allora $h \in \ker(\alpha)$ $\forall \alpha \in \Phi$.

Ma allora $[h, L_\alpha] = \{0\}$ e $[h, H] = \{0\}$, da cui $h \in Z(L) = \{0\}$ cioè $h=0$. Segue: $\dim H^* = \dim \mathrm{Span}\,\Phi$, cioè $H^* = \mathrm{Span}\,\Phi$.

2) Sia $\alpha \in \Phi$, sappiamo $L_\alpha \perp L_{(\neq -\alpha)}$, e se $L_{-\alpha} = \{0\}$ allora $L_\alpha \perp L$, assurdo.

3) Siano $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$, $h \in H$:

$$K(h, [x,y]) = K([h,x], y) = K(\alpha(h)x, y) = \alpha(h)K(x,y) =$$

$$= K(t_\alpha, h)\, \underbrace{K(x,y)} = K(h, t_\alpha K(x,y))$$

Segue: $[x,y] = t_\alpha \cdot K(x,y)$

4) Supp. per assurdo $\alpha(t_\alpha) = 0$ (sarebbe $K(\alpha,\alpha)=0$).

Scegliamo $e_\alpha \in L_\alpha$, e $f \in L_\alpha$ taliche $K(e_\alpha, f) = 1$

Abbiamo: $ad(t_\alpha)(L_\alpha) = \{0\}$, anche $(-\alpha)(t_\alpha) = 0$ cioè

$ad(t_\alpha)(L_{-\alpha}) = \{0\}$.

Consid. $R = \text{Span}\{e_\alpha, f, t_\alpha\}$ è una sottoalgebra di Lie di L, e $ad_L : L \to L$ manda R isomorficamente nella sua immagine $ad_L(R)$.

Ora, R è risolubile (persino nilpotente), quindi c'è una base di L in cui $ad_L(R) \subseteq \mathfrak{b}(n)$. Allora $ad_L(t_\alpha) \in \mathfrak{n}(n)$, perché $t_\alpha \in [R,R]$, cioè $ad_L(t_\alpha)$ è nilpotente $\neq 0$: assurdo.

5) Sia di nuovo $e_\alpha \in L_\alpha$, scegliamo $f_\alpha \in L_{-\alpha}$ tale che

$$\kappa(e_\alpha, f_\alpha) = \underbrace{\frac{2}{\kappa(\alpha,\alpha)}}.$$ Poniamo $h_\alpha = \frac{2 t_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)}$. Allora:

$$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha, \qquad [h_\alpha, e_\alpha] = \frac{2[t_\alpha, e_\alpha]}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \frac{2\,\alpha(t_\alpha)\cdot e_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)} = \frac{2\kappa(\alpha,\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} e_\alpha =$$

$$= 2 e_\alpha$$

Analogamente $[h_\alpha, f_\alpha] = -2 f_\alpha$. Quindi vale 5).

6) Formula per h_α: è in 5). Inoltre $t_\alpha = -t_{-\alpha}$, e $\kappa(-\alpha,-\alpha) = \kappa(\alpha,\alpha)$ e quindi $h_\alpha = -h_{-\alpha}$. Infine

$$\alpha(h_\alpha) = \frac{2\,\alpha(t_\alpha)}{\kappa(\alpha,\alpha)} = 2.$$

$\square$

<u>Proposizione</u>: 1) Data $\alpha \in \Phi$, $\dim(L_\alpha) = 1$.
Allora $\text{Span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}$ della prop. precedente è uguale a $L_\alpha \oplus k t_\alpha \oplus L_{-\alpha} = S_\alpha$ e dipende solo da α.
(e dati e_α, h_α allora f_α è unico, perché $\dim(L_{-\alpha}) = 1$).

2) Data $\alpha\in\Phi$, se $c\alpha\in\Phi$ per $c\in\mathbb{Z}$, allora $c\in\{1,-1\}$.

3) Date $\alpha,\beta\in\Phi$, allora $\beta-\beta(h_\alpha)\alpha\in\Phi$ e $\beta(h_\alpha)\in\mathbb{Z}$.

4) Date $\alpha,\beta\in\Phi$, se $\alpha+\beta\neq 0$ allora $[L_\alpha,L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$

(cioè se $\alpha+\beta\notin\Phi$ riotteniamo $[L_\alpha,L_\beta]=\{0\}$ perché $[L_\alpha,L_\beta]\subseteq L_{\alpha+\beta}=\{0\}$, ma se $\alpha+\beta\in\Phi$ allora $[L_\alpha,L_\beta]\neq\{0\}$ ed è uguale a $L_{\alpha+\beta}$).

5) Date $\alpha,\beta\in\Phi$, supp. $\beta\notin\{\alpha,-\alpha\}$, consideriamo le radici del tipo $\beta+i\alpha$ con $i\in\mathbb{Z}$; siano $r,q\in\mathbb{Z}$ massimi tali che $\beta+q\alpha\in\Phi$ e $\beta-r\alpha\in\Phi$. Allora $r,q\geq 0$ e abbiamo

$$\beta+q\alpha,\ \beta+(q-1)\alpha,\ \dots,\ \beta,\ \dots,\ \beta-(r-1)\alpha,\ \beta-r\alpha\ \in\Phi.$$

(queste radici formano la <u>α-stringa</u> di β). Inoltre $r-q=\beta(h_\alpha)$.

6) L è generata dagli L_α con $\alpha\in\Phi$, cioè se $\tilde{L}\subseteq L$ è una sottoalgebra contenente L_α $\forall\alpha\in\Phi$ allora $\tilde{L}=L$.

<u>Dim.:</u> Fissiamo $\alpha\in\Phi$, e $S_\alpha=\operatorname{Span}\{e_\alpha,f_\alpha,h_\alpha\}$ come nella prop. precedente (scegliendo $e_\alpha\in L_\alpha\setminus\{0\}$). Consideriamo L come S_α-modulo, tramite la rappr. aggiunta. Consideriamo

$$M = \bigoplus_{c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} L_{c\alpha} \oplus H$$

è un S_α-sottomodulo (si vede subito che $[e_\alpha, M] \subseteq M$, $[f_\alpha, M] \subseteq M$, e M è h_α-stabile). Sappiamo che i pesi di h_α su un qualsiasi $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2)$-modulo sono interi, e sono: 0 su H, e

$\underbrace{c \cdot \alpha(h_\alpha) = 2c}$ su L_α.

Segue: $2c \in \mathbb{Z}$.

Studiamo α su H: $\quad H = \underline{\underline{\ker(\alpha)}} \oplus k \underset{\uparrow \alpha(h_\alpha)=2}{h_\alpha}$

Inoltre $\ker(\alpha)$ è un S_α-sottomodulo: $[h_\alpha, \ker(\alpha)] = 0$, inoltre

dato $h \in \ker(\alpha)$ abb. $[e_\alpha, h] = -[h, e_\alpha] = -\underset{\overset{\|}{0}}{\alpha(h)} e_\alpha = 0$ e

lo stesso con $[f_\alpha, h] = 0$.

Abbiamo anche: $\ker(\alpha) \cap \underline{\underline{S_\alpha}} = \{0\}$, e allora

$$M \supseteq \ker(\alpha) \oplus S_\alpha$$

e quest'ultimo è un S_α-sottomodulo.

Esiste un supplementare S_α-stabile M':

$$M = \underbrace{(\ker(\alpha) \oplus S_\alpha)} \oplus \underbrace{M'}$$

I pesi di h_α su M' non comprendono $0 \in \mathbb{Z}$, perché un vettore di h_α-peso 0 è in $\ker(\alpha)$. Quindi M' ha solo h_α-pesi dispari.

Segue: gli h_α-pesi pari di M sono $2, 0, -2$.

Da questo segue: $2\alpha \notin \Phi$ altrimenti vedrei l'h_α-peso 4 in M.

Cioè il doppio di una radice non è mai una radice. Applicato a $\frac{\alpha}{2}$ (se fosse una radice) implica $\frac{\alpha}{2} \notin \Phi$, cioè nell'espressione per M

abb. se $c = \frac{1}{2}$ allora $L_{c\alpha} = \{0\}$.

Allora M non ha l'h_α-peso $1 \in \mathbb{Z}$, e allora M non ha h_α-pesi dispari, da cui $M' = \{0\}$. Cioè

$$M = \underbrace{\ker(\alpha)}_{\subseteq H} \oplus \underset{\text{span}\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}}{\overset{\shortparallel}{S_\alpha}}$$

Da questo $\dim(L_\alpha) = 1$ (e $\dim(L_{-\alpha}) = 1$) e anche:

se $c\alpha \in \Phi$ con $c \in \mathbb{Q}$ allora $c \in \{1, -1\}$. Allora valgono 2) e 1).

Prendiamo ora $\alpha, \beta \in \Phi$, se $\beta = \alpha$ allora sappiamo $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{2\alpha} = \{0\}$ quindi vale $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$, inoltre $\beta(h_\alpha) = 2$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = -\alpha$ allora vale 3) e 4). Se $\beta = -\alpha$ allora $\beta(h_\alpha) = -2$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = (-\alpha) + 2\alpha = \alpha$ e vale 3).

Possiamo supporre per 3) e 4) allora $\beta \notin \{+\alpha, -\alpha\}$.

Consid.

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha}$$

Anche questo è un S_α-sottomodulo, e gli h_α-pesi sono

$$\{ \underbrace{(\beta+i\alpha)(h_\alpha)}_{\substack{\| \\ \beta(h_\alpha)+2i}} \mid i\in\mathbb{Z},\ \beta+i\alpha\in\Phi \}$$

Segue: il peso 0 e il peso 1 non compaiono mai contemporaneamente, e ciascun peso compare con molteplicità 1, perché $\dim(L_{\beta+i\alpha})=0$ oppure 1. Allora N contiene un solo addendo irriducibile, cioè N è irriducibile. Segue:

$$\{\beta(h_\alpha)+2i \mid i\in\mathbb{Z},\ \beta+i\alpha\in\Phi\} = \{m, m-2, \dots, -m+2, -m\}$$

cioè $\beta+q\alpha, \beta+(q-1)\alpha, \dots, \beta-(r-1)\alpha, \beta-r\alpha$ sono tutte radici.

Inoltre $\beta(h_\alpha)+2q = -(\beta(h_\alpha)-2r)$, da cui $\underline{\beta(h_\alpha)=r-q}$.

Allora $\beta(h_\alpha)\in\mathbb{Z}$, inoltre $-r\le -r+q\le q$ per cui

$\underline{\beta-\beta(h_\alpha)\alpha}\in\Phi$. Da questo valgono 3) e 5).

6) segue dal fatto che $[e_\alpha, f_\alpha]=h_\alpha$ e gli h_α generano H (perché le radici generano H^*).

$\square$