TOKEN: 325280

Corollario: Sia V un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo di dim. finita. Gli h-pesi di V sono tutti in $\mathbb{Z}$ e per ogni h-peso α abb. $\dim(V_\alpha) = \dim(V_{-\alpha})$. Infine decomponendo V in somma di irriducibili, il numero di addendi è $\dim(V_0) + \dim(V_1)$.

Dim.: Abb. $V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t)$ dove $V(\lambda_i) =$ $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile di peso più alto $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Per ogni $\alpha \in k$ abbiamo

$$V_\alpha = V(\lambda_1)_\alpha \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t)_\alpha,$$

inoltre $V(\lambda_i)_\alpha$ ha dim. 0 opp. 1, e $\dim(V(\lambda_i)_\alpha) = \dim(V(\lambda_i)_{-\alpha})$.

Infine se λ_i è dispari allora $\dim(V(\lambda_i)_1) = 1$, e $\dim(V(\lambda_i)_0) = 0$, invece se λ_i è pari allora $\dim(V(\lambda_i)_1) = 0$, e $\dim(V(\lambda_i)_0) = 1$.

$\square$

Sottoalgebre torali

Def.: Sia L algebra di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalgebra.
H si dice torale se $x = x_s \; \forall x \in H$, cioè se ogni elem. di H è semisemplice.

Oss.: Il nome "torale" viene dall'analogia con $SL(n, \mathbb{C})$

$$H(n) \cap SL(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1 \cdots a_n = 1 \right\} \cong (\mathbb{C}^*)^{n-1}$$

e $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ è un gruppo di Lie che contiene come sottogruppo compatto (massimale) $(S^1)^{n-1}$, un toro $(n-1)$-dimensionale

<u>Lemma:</u> Sia $H \subseteq L$ sottoalgebra torale. Allora H è abeliana.

<u>Dim.:</u> Sia $x \in H$, allora $ad(x): L \to L$ è diagonalizzabile.

Consid. $ad(x)|_H : H \to H$. Anch'esso è diagonalizzabile,

infatti ogni autovettore gen. di $ad(x)$ in L è un autovettore.

Allora questo avviene anche per i vettori di H, e la decomp.

di Fitting di $ad(x)|_H$ dice che H è somma diretta di autospazi.

Sia $(y_1, \dots, y_n)$ base di H di autovettori di $ad(x)$:

$$ad(x)(y_i) = \alpha_i y_i \quad \text{con } \alpha_i \in k.$$

cioè $\underbrace{ad(y_i)}_{\text{è semisemplice}}(x) = \underbrace{-\alpha_i y_i}$

è nell'immagine di $ad(y_i)$ ma
anche nel nucleo, perché $ad(y_i)(\alpha_i y_i) = 0$

ma il nucleo e l'immagine di un endomorfismo diagonalizzabile sono in somma diretta (come nel lemma prima della decomp. di Fitting).

Cioè $\alpha_i y_i = 0$, visto che $y_i \neq 0$ allora $\alpha_i = 0$ $\forall i$, cioè

$ad(x)|_H = 0$, e allora H è abeliana.

$\square$

Radici di un'algebra di Lie semisemplice

Es.: $sl(n) = \underbrace{\left(h(n)\cap sl(n)\right)} \oplus \bigoplus_{i\neq j} k e_{ij}$ e abb. e_{ij} è autovettore

per $ad(x)$ $\forall x \in h(n)\cap sl(n)$:

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}}_{x}, \begin{array}{cc} \text{posto } j & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ & 1 & \cdots \\ & & \end{pmatrix} & \leftarrow \text{posto } i \end{array}\right]$$

$$= \underbrace{(a_i - a_j)}_{\text{autovalore}} e_{ij}$$

In generale, sia L algebra di Lie semisemplice, $H \subseteq L$ sottoalgebra torale massimale, allora è abeliana, e allora esiste una base di L fatta di autovettori simultanei per tutti gli $ad(x)$, $x \in H$. Cioè possiamo decomporre L in somma diretta di autospazi simultanei:

$$L = L_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in H^* \\ \alpha \neq 0}} L_\alpha$$

(l'autovalore di un dato $v \in L$ per $ad(x)$ con $x \in H$, al variare di x è una funzione <u>lineare</u> $H \to k$)

dove $L_\alpha = \{ y \in L \mid ad(x)(y) = \alpha(x) y \ \forall x \in H \}$

inoltre $L_0 = \{ y \in L \mid [x,y] = 0 \} = Z_L(H) \ (\supseteq H)$

Def.: Gli elem. $\alpha \in H^*$ tali che $\alpha \neq 0$ e $L_\alpha \neq \{0\}$ si dicono <u>radici</u> di L (rispetto a H).

Proposizione: $\forall \alpha, \beta \in H^*$ vale:

1) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$

2) Se $\alpha \neq 0$ e $x \in L_\alpha$ allora x è ad-nilpotente

3) se $\alpha+\beta \neq 0$ allora $L_\alpha \perp L_\beta$ risp. alla forma di Killing.

Dim.: 1) Siano $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, $h \in H$, allora

$$ad(h)([x,y]) = [ad(h)(x), y] + [x, ad(h)y] =$$

$$= [\alpha(h)x, y] + [x, \beta(h)y] = (\alpha(h)+\beta(h))[x,y]$$

2) Da 1) segue $ad(x)^m(L_\beta) \subseteq L_{m\alpha+\beta}$ $\forall x \in L_\alpha$, $\beta \in H^*$, quindi se $\alpha \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ è abb. grande allora $ad(x)^m(L_\beta) = \{0\}$. Quindi per m abb. grande $ad(x)^m(L) = \{0\}$.

3) Sappiamo $\alpha+\beta \neq 0$, cioè esiste $h \in H$ tale che $\alpha(h)+\beta(h) \neq 0$

allora $$\alpha(h) K(\underbrace{x}_{\in L_\alpha}, \underbrace{y}_{\in L_\beta}) = K([h,x], y) = -K([x,h], y) =$$

$$= -K(x,[h,y]) = -\beta(h)K(x,y)$$

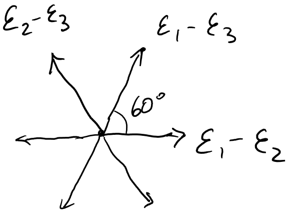
segue $\underbrace{(\alpha(h)+\beta(h))}_{\neq 0} K(x,y)=0$ e allora $K(x,y)=0$.

$\square$

Es.: 1) $L = sl(3)$, $H = sl(3)\cap h(3)$ $L = H \oplus (k e_{12} \oplus k e_{13} \oplus k e_{23} \oplus$
$\oplus k e_{21} \oplus k e_{31} \oplus k e_{32})$

radici sono $\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \pm(\varepsilon_1-\varepsilon_3), \pm(\varepsilon_2-\varepsilon_3)$, dove $\varepsilon_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_i$

pensiamo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ come la base canonica di $\mathbb{R}^3$, disegnamo le radici sul piano di $\mathbb{R}^3$ dove la somma delle coord. fa zero:



è un esagono regolare

2) $L = sp(4)$ $H = h(4)\cap sp(4)$

in generale, per come abb. definito sp, abb.:

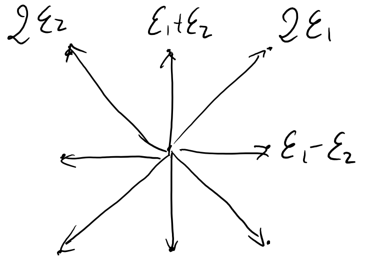
$$sp(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\tilde{A} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{A} = \text{la ,,trasposta'' di } A \text{ rispetto alla diagonale secondaria} \\ B, C = \text{simmetriche rispetto alla diag. secondaria} \end{array} \right\}$$

quindi $sp(4) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & a & x & y \\ b & t_2 & z & x \\ u & s & -t_2 & -a \\ t & u & -b & -t_1 \end{pmatrix} \right\}$

le radici sono: $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$

autovett. $a=1$ gli altri $=0$; $x=1$ altri $=0$; $y=1$ altri $=0$; $z=1$ altri $=0$

e i loro opposti. Di nuovo possiamo disegnare le 8 radici pensando $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ come base ortonormale di $\mathbb{R}^2$:



<u>Corollario</u>: $K\big|_{L_0\times L_0}$ è non degenere.

<u>Dim.</u>: Sia $x\in \ker\left(K\big|_{L_0\times L_0}\right)$ cioè $x\in L_0$ e $K(x,y)=0$ $\forall y\in L_0$.

Dalla proposizione sappiamo $K(x,z)=0$ $\forall z\in L_\alpha$ $\forall \alpha\neq 0$.

Segue: $K(x,w)=0$ $\forall w\in L$, da cui $x=0$.

$\square$

<u>Prop.</u>: $K\big|_{H\times H}$ è non degenere.

<u>Dim.</u>: Sia $x\in \ker\left(K\big|_{H\times H}\right)$ cioè $x\in H\cap \underbrace{H^\perp}$

"ortogonale" rispetto a K

studiamo $K(x,y)$ con $y\in L_0$.

Decomp. $y=y_s+y_n$, ricordiamo $L_0=Z_L(H)$, quindi

$ad(Y)(H)=\{0\}$, e $ad(Y_s)= ad(Y)_s$ è un polinomio senza termine noto in $ad(Y)$, quindi $ad(Y_s)(H)=\{0\}$. Segue che $H+kY_s$ è una sottoalgebra, e anche che tutti i suoi elem. sono semisemplici (perché $ad(z)$ e $ad(Y_s)$ con $z\in H$ sono semisemplici e commutano, quindi anche la loro somma è semisemplice).

Allora $Y_s\in H$ per massimalità di H. Segue:

$$K(X,Y) = K(X, Y_s+Y_n) = \underbrace{K(\overset{H^\perp}{X},\overset{H}{Y_s})}_{=0} + K(X,Y_n) =$$

$$= tr(ad(X)ad(Y_n))$$

D'altronde X e Y commutano, e X e Y_s commutano, allora anche X e Y_n commutano, e anche $ad(X)$, $ad(Y_n)$.

Segue $ad(X)ad(Y_n)$ nilpotente da cui $K(X,Y)=0$.

Cioè $K(X,Y)=0$ $\forall Y\in L_0$ e X è in L_0, quindi $X=0$ per il corollario precedente.

$\square$

Corollario: $H=L_0$.

Dim.: Abb. $K|_{L_0\times L_0}$ è non degenere, $K|_{H\times H}$ è non degenere

da questo segue $L_0 = \boxed{H\oplus(H^\perp\cap L_0)}$

Sono entrambi ideali di L_0: H lo è perché $[H,L_0]=\{0\}$ e

$H^\perp \cap L_0$ è un ideale per l'associatività di K.

Ogni elem. di $H^\perp \cap L_0$ è ad-nilpotente perché dato $y \in H^\perp \cap L_0$ abb. $y_s \in H$ per il ragionam. di prima, e $\forall x \in H$ abb.

$$0 = K(x, y) = K(x, y_s) \qquad \text{(come prima)}$$

Segue $y_s = 0$ perché $K|_{H \times H}$ è non degenere.

Prendiamo ora $y = y_n \in H^\perp \cap L_0$ e $z \in L_0$:

decomp. di z in $L_0 = H \oplus (H^\perp \cap L_0)$

$$tr(ad(y)ad(z)) = \underbrace{tr(\underset{H^\perp}{ad(y)}\,\underset{H}{ad(z_1)})}_{=0} + tr(\underset{H^\perp \cap L_0}{ad(y)}\,\underset{H^\perp \cap L_0}{ad(z_2)})$$

Ma $ad(H^\perp \cap L_0)$ è fatta di elem. nilpotenti di $gl(L)$, quindi per il teorema di Engel c'è una base di L in cui

$ad(y)$ e $ad(z_2)$ sono in $n(n)$. Segue: $tr(ad(y)ad(z_2)) = 0$

Segue: $y = 0$ perché $K|_{L_0 \times L_0}$ è non degenere, cioè $H = L$.

$\square$