TOKEN: 529780

Foglio di esercizi n. 5

Es. 1: Base duale di (e, h, f) rispetto a $K_{\mathfrak{sl}(2)}$.

$K_{\mathfrak{sl}(2)}$ ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a (e, h, f), base duale è

$\left(\frac{f}{4}, \frac{h}{8}, \frac{e}{4}\right)$

Es. 2: Determinante di $K_{\mathfrak{sl}(3)}$.

Un metodo: si sceglie una base di $\mathfrak{sl}(3)$: e_{ij} = matr. elementare tutta nulla tranne che al posto i, j dove c'è 1 (con $i \neq j$)

e poi $h_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$h_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

In questa base si calcola $tr(ad(X)\, ad(Y))$ con X, Y vettori della base, si può fare trovando $ad(X)\, ad(Y)(Z)$ con Z anche nella base, e spesso si ottiene un elemento della base diverso da Z: contributo sulla traccia $= 0$, oppure $c \cdot Z$ con $c \in \mathbb{Z}$, e allora c'è un contributo sulla traccia di c.

Si trova: la matrice di K_L in questa base è

$$\left(\begin{array}{cc|cccccc} 12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(h_{12}, h_{23}, e_{12}, e_{23}, e_{13}, e_{21}, e_{32}, e_{31})$

e il determinante è $-3^9 2^8$.

Es. 3: Supp. $V = V_1 + \ldots + V_n$ dove $V_1, \ldots, V_n$ L-moduli irriducibili, dim. che allora V è somma diretta di moduli irriducibili.

Consid. le somme parziali $V_1,\ V_1+V_2,\ \ldots,\ V_1+V_2+\ldots+V_n$.

Se $V_1 = V_2$ allora possiamo "scartare" V_2 perché $V_1+V_2 = V_1$.

Altrimenti $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ (perché V_1 e V_2 sono irriducibili), allora $V_1+V_2 = V_1 \oplus V_2$.

Definiamo $$W_2 = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \boxed{V_1 = V_2} \\ V_2 & \text{se } \boxed{V_1 \cap V_2 = \{0\}} \end{cases}$$

Allora $V_1 + V_2 = V_1 \oplus W_2$

la somma è diretta perché $V_1 \cap W_2 = \{0\}$ in entrambi i casi

e W_2 è irriducibile opp. è $\{0\}$.

Proseguiamo per induzione: definiamo $$W_i = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \boxed{V_i \subseteq V_1 + \ldots + V_{i-1}} \\ V_i & \text{se } V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1}) = \{0\} \end{cases}$$

e vale sempre per induzione $V_1 + \ldots + V_i = V_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_i$

quindi $V = V_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$, e scartando i W_i che sono $\{0\}$ abb. scritto V come somma diretta di irriducibili.

Es. 4: Sia L risolubile, V L-modulo irriducibile, allora $\dim(V) = 1$, basta osservare che $\varphi(L) \subseteq b(n)$ per qualche base di V.

Segue: $n = 1$.

Es. 5: Calcolare $ad(e)ad(e') + ad(h)ad(h') + ad(f)ad(f')$ con (e', h', f') base duale dell'es. 1, viene:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha}_{\frac{\dim(L)}{\dim(V)}} \cdot Id$$

Teorema: Sia L semisemplice, $\varphi: L \longrightarrow gl(n)$ rappresentazione, $x \in L$. Allora

$$\varphi(x_s) = \varphi(x)_{s,std} \quad , \quad \varphi(x_n) = \varphi(x)_{n,std}$$

decomp. standard delle matrici

Dim.: $V = k^n$ è un L-modulo ed è completam. riducibile, $V = V_1 \oplus \_ \oplus V_t$ con V_i irriducibile $\forall i$. Anche L si decompone in somma diretta di algebre di Lie semplici: $L = L_1 \oplus \_ \oplus L_r$.

Dato $x = (x_1, .., x_r)$ con $x_i \in L_i$, abb.

$$x_s = ((x_1)_s, .., (x_r)_s).$$

"blocchi" di Y rispetto alla decomp. di V

Inoltre data $Y \in gl(n)$, scrivendo $Y = (Y_1, .., Y_t)$ dove $Y_i : V_i \to V_i$, allora $Y_{s,std} = ((Y_1)_{s,std}, \_, (Y_t)_{s,std})$.

Inoltre l'azione di L su V induce un'azione di L_i su V_j $\forall i,j$, possiamo considerare separatamente gli L_i e i V_j, cioè poss. supporre che L sia semplice, V irriducibile, inoltre possiamo supporre $\varphi(L) \neq \{0\}$, cioè $\ker(\varphi) = \{0\}$, e allora $\varphi: L \longrightarrow \varphi(L)$ $(\subseteq gl(V))$ è biiettiva.

Ricordiamo: x_s è def. da $ad(x_s) = ad(x)_{s,std}$.

Consid. $\boxed{ad(\varphi(x))|_{\varphi(L)}}$: $\varphi(L) \longrightarrow \varphi(L)$

$z = \varphi^{-1}(u)$

$u = \varphi(z) \longmapsto [\varphi(x), u] = [\varphi(x), \varphi(z)] = \varphi([x, z])$

con $z \in L$

Allora $ad(\varphi(x))|_{\varphi(L)} = \varphi \circ ad(x) \circ \varphi^{-1}$

Inoltre $\left(ad(\varphi(x))\big|_{\varphi(L)} \right)_{s,std} = \left(ad(\varphi(x))_{s,std} \right)\big|_{\varphi(L)}$

(cioè fare la decomp. classica e poi restringere a un sottosp. stabile è come prima restringere e poi decomporre, per l'unicità della decomposizione)

Inoltre $\left(\varphi \circ ad(x) \circ \varphi^{-1} \right)_{s,std} = \varphi \circ \underbrace{(ad(x))_{s,std}}_{= ad(x_s)} \circ \varphi^{-1}$

(coniugare con φ mantiene la decomposizione, sempre per l'unicità)

Concludiamo: $\varphi \circ ad(x_s) \circ \varphi^{-1} = \left(ad(\varphi(x))\big|_{\varphi(L)} \right)_{s,std}$

Concretamente: dato $u \in \varphi(L)$ abb.:

$$[\underbrace{\varphi(x)_{s,std}}, u] = \varphi\left([x_s, \varphi^{-1}(u)]\right) = [\underbrace{\varphi(x_s)}, u]$$

Per concludere che $\varphi(x_s) = \varphi(x)_{s,std}$ usiamo il lemma di Schur:

$$[\underbrace{\varphi(x)_{s,std} - \varphi(x_s)}_{=Y}, u] = 0, \quad \text{cioè } Y \in Z_{gl(V)}(\varphi(L)).$$

Quindi Y è uno scalare $\cdot\, Id$, calcoliamone la traccia. Abb.:

$$\varphi(x_s) \in \varphi(L) = [\varphi(L), \varphi(L)] \quad \text{quindi } tr(\varphi(x_s)) = 0$$

e anche $tr(\varphi(x)) = 0$ per lo stesso motivo, e $\varphi(x)$ ha la stessa traccia di $\varphi(x)_{s,std}$. Quindi $\varphi(x_s) = \varphi(x)_{s,std}$. Stesso rag. con $\varphi(x_n) = \varphi(x)_{n,std}$.

$\square$

Corollario: Data $L \subseteq gl(n)$ semisemplice, abb. $x_s = x_{s,std}$ e $x_n = x_{n,std}$ $\forall x \in L$.

Dim.: Il teorema con $\varphi =$ inclusione di L in $gl(n)$. $\square$

Teoria delle rappr. di $sl(2)$

Sia V un $sl(2)$-modulo, supponiamo V abbia una base di autovettori di h.

In particolare, questo è vero se V ha dim. finita perché allora vale il teorema precedente, e $\varphi(h)$ è semisemplice perché h è semisemplice ($\varphi : L \to gl(V)$ è la rappresentazione):

$$V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha \qquad V_\alpha = \{ v \in V \mid h.v = \alpha \cdot v \}$$

Def.: Se $V_\alpha \neq \{0\}$ allora α si chiama <u>peso</u> di V, i vettori di V_α si chiamano <u>vettori di peso</u> α.

Lemma: $e.V_\alpha \subseteq V_{\alpha+2}$, $f.V_\alpha \subseteq V_{\alpha-2}$

Dim.: Sia $v \in V_\alpha$, $h.(e.v) = [h, e].v + e.(h.v) =$

$$= 2e.v + e.\alpha v = (2+\alpha)e.v$$

cioè $e.v \in V_{\alpha+2}$. Stesso rag. per $f.v \in V_{\alpha-2}$. $\square$

Esempio: Ricordiamo l'azione vista di $sl(2)$ su $k[x,y]_d$, gli autovalori di

h erano $d, d-2, \dots, -d+2, -d$, e effettivam. e, f si comportavano come nel lemma.

Def.: Sia $\alpha \in k$ tale che $V_{\alpha+2} = \{0\}$ allora i vettori non nulli di V_α si dicono massimali, e vale $e.V_\alpha = \{0\}$.

Oss.: Se $V \neq \{0\}$ e ha dim. finita allora esistono vettori massimali.

Lemma: Sia $v_0 \in V$ vettore massimale di autovalore λ, poniamo $v_i = \frac{1}{i!} \underbrace{f^i . v}_{\substack{\parallel \\ \underbrace{f.(f.\dots.(f.v)\dots)}_{i\text{-volte}}}}$

e $v_{-1} = 0$. Allora:

$$h.\, v_i = (\lambda - 2i) v_i$$
$$f.\, v_i = (i+1) v_{i+1}$$
$$e.\, v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$$

$\forall i \geq 0$.

Dim.: $h.v_i$: il lemma precedente

$f.v_i$: è la def. di v_{i+1}

$e.v_i$: per induzione (esercizio). $\square$

Oss.: Se V ha dim. finita, f è nilpotente e quindi anche $\varphi(f)$ è nilpotente, e perciò $v_m = 0$ per m abb. grande. Se m è tale che $v_m = 0$ ma $v_{m-1} \neq 0$, allora $\lambda - m + 1 = 0$, da cui $\lambda + 1 = m$ e in particolare $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Teorema: Sia V un $sl(2)$-modulo di dim. finita irriducibile, sia v_0 un vettore massimale di peso λ. Allora $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, e vale:

1) $V = \mathrm{Span}\{v_0, v_1, \dots\}$, V è la somma diretta
$$V = \bigoplus_{i=0}^{\lambda} V_{\lambda-2i} = V_\lambda \oplus V_{\lambda-2} \oplus \ldots \oplus V_{-\lambda+2} \oplus V_{-\lambda}$$
in cui ogni $V_{\lambda-2i}$ ha dim. 1.

2) V ha un unico vettore massimale a meno di multipli scalari; e il suo peso λ è il più alto

3) L'azione di $sl(2)$ su V è data dalle formule del lemma, in particolare V è univocamente determinato da λ a meno di isomorfismo.

Dim.: ovvia.

Oss.: Gli $sl(2)$-moduli irr. di dim. finita sono a meno di isom. i moduli $k[x,y]_d$.

Esercizio: Se $\mathrm{char}(k) = p > 0$, allora non tutti i $k[x,y]_d$ sono irriducibili; trovare un caso in cui $k[x,y]_d$ non è completam. riducibile.