Lemma: $c_\varphi \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$

Dim.: Usiamo $[A, BC] = [A,B]\cdot C + B\cdot [A,C]$ $\forall A,B,C \in gl(n)$ (cioè ad(A) è una derivazione di $gl(n)$ anche come algebra associativa col prod. usuale), dim: esercizio.

Dato $x \in L$, scriviamo $[x, x_i] = \sum_j \alpha_{ij} x_j$ $\quad [x, y_i] = \sum_j \beta_{ij} y_j$

Allora $$\alpha_{ij} = \sum_l \alpha_{il}\, b_\varphi(x_l, y_j) = b_\varphi\left(\sum_l \alpha_{il} x_l, y_j\right) =$$
$$= b_\varphi([x, x_i], y_j) = -b_\varphi([x_i, x], y_j) = -b_\varphi(x_i, [x, y_j]) =$$
$$= \underset{\uparrow \text{stessi passaggi}}{\dots} = -\beta_{ji}$$

$$[x, x_i] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j \qquad [x, y_i] = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} y_j$$

abb. dim. $\alpha_{ij} = -\beta_{ji}$. Allora

$$[\varphi(x), c_\varphi] = \left[\varphi(x), \sum_i \varphi(x_i)\varphi(y_i)\right] = \sum_i \Big(\overbrace{[\varphi(x), \varphi(x_i)]}^{\varphi([x,x_i])} \cdot \varphi(y_i) +$$

$$\varphi(x_i) \cdot \underbrace{[\varphi(x), \varphi(y_i)]}_{\varphi([x,y_i])} \Big) = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\alpha_{ij}\, \varphi(x_j)\varphi(y_i) + \varphi(x_i)\beta_{ij}\varphi(y_j) \right) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \underset{\uparrow}{\alpha_{ij}}\, \underbrace{\varphi(x_j)\varphi(y_i)} + \sum_{i,j=1}^{m} \underset{\uparrow}{\beta_{ji}}\, \underbrace{\varphi(x_j)\varphi(y_i)} = 0$$

$\square$

Dal lemma di Schur segue anche che se φ è irriducibile allora c_φ è uno scalare, cioè $c_\varphi = \alpha \cdot Id_V$ per un $\alpha \in k$.

Inoltre $tr(c_\varphi) = \alpha \cdot \dim(V) = \sum_{i=1}^{m} tr(\varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \sum_{i=1}^{m} b_\varphi(x_i, y_i) =$

$= m = \dim(L)$

cioè (ricordiamo $V \neq \{0\}$ se è irriducibile) $\alpha = \dfrac{\dim(L)}{\dim(V)}$.

<u>Esempio</u>: $L = sl(2)$, $\varphi: sl(2) \to gl(2)$ l'inclusione

base di L: (e, h, f), base duale $(f, \frac{h}{2}, e)$

$$c_\varphi = ef + \frac{1}{2}h^2 + fe = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{\dim(L)}{\dim(V)} \cdot I_2$$

Teorema (Weyl): Sia L algebra di Lie semisemplice, V L-modulo di dim. finita, allora V è completam. riducibile.

Dim.: Dimostriamo che ogni sottomodulo W ($W \neq \{0\}$, $W \neq V$) ammette un supplementare L-stabile, cioè un sottomodulo $X \subseteq V$ tale che $V = W \oplus X$. Questo è equivalente alla completa riducibilità di V. (Esercizio: dimostrazione di questa equivalenza.)

Procediamo per induzione su $\dim(V)$, e possiamo supporre φ fedele, eventualm. rimpiazzando L con $\varphi(L)$ (anch'essa semisemplice).

1) Supponiamo $\dim(W) = \dim(V) - 1$. In questo caso $\frac{V}{W}$ è un L-modulo di dimensione 1, e l'immagine di L in $gl(V/W)$ è contenuta in $gl(V/W)^{(1)} \cong gl(1)^{(1)} = sl(1) = \{0\}$.

Cioè V/W è l'L-modulo nullo, cioè $x.v \in W \ \forall v \in V$.

1a) Supponiamo inoltre W irriducibile. Allora c_φ fornirà un supplementare di W.

Sappiamo $c_\varphi : V \to V$, e commuta con $\varphi(L)$. Questo si può reinterpretare dicendo che c_φ è un omomorfismo di L-moduli, infatti

$$c_\varphi(x.v) = x.\, c_\varphi(v)$$

(perché $x.v = \varphi(x)(v)$ e $\varphi(x)$ commuta con c_φ)

Allora $\ker(c_\varphi)$ è un L-sottomodulo, e vogliamo che sia

$$V \overset{(?)}{=} W \oplus \ker(c_\varphi).$$

Ricordiamo: ogni $x \in L$ manda W in W, e allora anche c_φ.

Segue: anche c_φ induce un'appl. lineare $\frac{V}{W} \to \frac{V}{W}$, ed è l'applicazione nulla perché ogni elem. di L agisce come l'appl. nulla.

Inoltre c_φ agisce su W come la moltiplicaz. per $\frac{\dim\begin{pmatrix}\text{immagine di} \\ L \text{ in } gl(W)\end{pmatrix}}{\dim(W)} \neq 0$

se l'immagine di L in $gl(W)$ è non nulla.

Se invece l'immagine di L in $gl(W)$ è nulla, allora ogni sottospazio vettoriale di W è un sottomodulo, quindi W ha dim. 1, e allora

$\varphi(L) \subseteq n(2)$ prendendo una base di V che inizia con una base di W.

Segue $\varphi(L) = \{0\}$ perché $n(2)$ è abeliana, cioè $L = \{0\}$. Allora ogni sottosp. di V è un sottomodulo, e V è completam. riducibile.

Se c_φ agisce su W come la molt. per uno scalare $\neq 0$, sia esso $\alpha \in k$:

in una base di V che comincia con una base di W c_φ è della forma

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & 0 & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \alpha & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{base di } W}$$

e $\ker(c_\varphi) \cap W = \{0\}$,

$\dim(\ker(c_\varphi)) = 1$, quindi

$V = W \oplus \ker(c_\varphi)$.

b) Supponiamo W non irriducibile, cioè esiste $W' \subsetneq W$ sottomodulo non nullo.

Consideriamo $\frac{V}{W'} \supsetneq \frac{W}{W'}$. Sappiamo $\dim(V) > \dim\left(\frac{V}{W'}\right)$, per induzione $\frac{W}{W'}$ ha un supplementare L-stabile in $\frac{V}{W'}$, sia esso

Z: $\frac{V}{W'} = \frac{W}{W'} \oplus Z$. Abbiamo: Z è della forma $\frac{\tilde{Z}}{W'}$ con

$\tilde{Z}$ un L-sottomodulo di V contenente W':

$$\frac{V}{W'} = \frac{W}{W'} \oplus \frac{\tilde{Z}}{W'}$$

Segue $V = W + \tilde{Z}$, ma W e $\tilde{Z}$ si intersecano almeno in W'!

D'altronde $\dim(\tilde{Z}) < \dim(V)$, quindi $W \cap \tilde{Z}$ ha un supplementare L-stabile in $\tilde{Z}$:

$$\tilde{Z} = (W \cap \tilde{Z}) \oplus X$$

Cioè

$$V = W + \left(\underline{(W \cap \tilde{Z})} \oplus X \right)$$

e deduciamo $V = W \oplus X$.

(In realtà questa parte b) non usa il fatto che W ha codim. 1.)

2) Discutiamo il caso $\operatorname{codim}_V(W)$ qualsiasi.

Usiamo le proiezioni $V \to W$ lungo un sottospazio, in realtà un analogo:

considero in $\operatorname{Hom}(V, W) = \{ f : V \to W \}$ il sottospazio

$$\mathcal{V} = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare}, \ f|_W \in k \cdot Id_W \}$$

Sappiamo che $\operatorname{Hom}(V,W)$ sono un L-modulo con struttura naturale, dimostriamo che $\mathcal{V}$ è un sottomodulo. Sia $f \in \mathcal{V}$, $x \in L$, $w \in W$

allora
$$(\underset{\sim}{X.f})(w) = X.\underbrace{f(w)}_{\substack{\| \\ \alpha\cdot w \text{ con } \alpha\in k}} - f(\underbrace{X.w}_{\substack{\in \\ W}}) = \alpha\cdot X.w - \alpha\cdot X.w = 0$$

Segue: $X.f \in \mathcal{V}$, e inoltre $(X.f)|_W = 0\cdot Id_W$.

Allora L manda non solo $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$, ma $\mathcal{V}$ in

$$\mathcal{W} = \{ f : V \to W \text{ lineare} \mid f|_W = 0 \}$$

Inoltre $\mathcal{W}$ è un sottospazio di codim. 1 in $\mathcal{V}$, infatti scegliamo $\bar{f} \in \mathcal{V}$ tale che $\bar{f}|_W = 1\cdot Id_W$. Data ora $f \in \mathcal{V}$ qualsiasi, $f|_W = \alpha\cdot Id_W$, allora

$$f = (\underbrace{f - \alpha\bar{f}}_{\substack{\in \\ \mathcal{W}}}) + \underbrace{\alpha\bar{f}}_{\text{multiplo di } \bar{f}}$$

da questo segue $\operatorname{codim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) = 1$.

Infine $\mathcal{W}$ è un L-sottomodulo, quindi c'è un supplementare L-stabile di $\mathcal{W}$ in $\mathcal{V}$ per la parte 1):

$$\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{X}$$

Sappiamo $\dim(\mathcal{X}) = 1$, quindi prendiamo un generatore $f_0 \in \mathcal{X}$, riscalando f_0 possiamo supporre $f_0|_W = Id_W$.

Visto che $\mathcal{X}$ ha dimensione 1, per lo stesso ragionam. di prima abbiamo $X.f_0 = 0$ $\forall x \in L$. Cioè $\forall v \in V$:

$$0 = (X.f)(v) = X.f(v) - f(X.v)$$

Cioè $f_0 : V \to W$ è un omomorfismo di L-moduli, e allora $\ker(f_0)$ è un sottomodulo di V. Ora $\ker(f_0) \cap W = \{0\}$ perché $f_0|_W = Id_W$, inoltre $\dim(\ker(f_0)) + \dim(Im(f_0)) = \dim(V)$, e $Im(f_0) = W$, quindi $\dim(\ker(f_0)) + \dim(W) = \dim(V)$.

Ponendo $X = \ker(f_0)$ abb. $X \oplus W = V$ e X è un L-sottomodulo.

$\square$

Confronto fra decomp. di J.-C. in $gl(n)$ e in L semisemplice.

Teorema: Sia L semisemplice, $\varphi : L \to gl(n)$ rappresentazione. Allora $\forall x \in L$ valgono

$$\varphi(X_s) = \varphi(X)_{s,std} \qquad \text{e} \qquad \varphi(X_n) = \varphi(X)_{n,std}$$

decomposizione "standard" in $gl(n)$