<u>Corollario</u>: Se L è semisemplice allora $L=[L,L]$, ogni immagine omomorfa di L è semisemplice, e gli ideali di L sono le somme di alcuni degli L_i.

<u>Dim.</u>: $L^{(1)} = L_1^{(1)} \oplus \dots \oplus L_t^{(1)} = L_1 \oplus \dots \oplus L_t = L$

Sia poi $I \subseteq L$ ideale, e consid. $J = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \pi_i(I)$

Abb. $\pi_i(I) = L_i$ opp. $\{0\}$, e chiaram. $I \subseteq J$. Inoltre

$I \supseteq [I, L_i] = [\pi_i(I), L_i] = \pi_i(I)$, quindi $I \supseteq J$.

Segue anche che ogni imm. omomorfa è somma diretta di alcuni degli L_i.

$\square$

<u>Teorema</u>: Se L è semisemplice allora $ad(L) = Der(L)$.

Per la dim. si usa:

<u>Oss.</u>: Dato $x \in L$ (qualsiasi) e $\delta \in Der(L)$, abb. $[\delta, ad(x)] = ad(\delta(x))$, che si verifica facilmente.

<u>Dim. teorema</u>: Sia L semisemplice, e osserviamo che $ad(L)$ "I" è un ideale di $Der(L)$, grazie all'oss. precedente.

Vogliamo usare la forma di Killing su $Der(L)$ e studiare $I^{\perp}$.

Oss. che anche $ad(L)$ è semisemplice: non solo è imm. omomorfa, ma vale $Z(L)=\{0\}$ quindi $ad(L)\cong L$.

Perciò $K_I : I\times I \longrightarrow k$ è non degenere.

Inoltre sappiamo $K_{I\times I} = K_{Der(L)}\big|_{I\times I}$.

Allora $I^\perp$ = ortogonale di I in $Der(L)$ risp. a $K_{Der(L)}$ soddisfa $I\cap I^\perp=\{0\}$, quindi $[I, I^\perp]=\{0\}$ (perché è cont. in entrambi).

Sia ora $\delta\in I^\perp$, abb. $[\delta, ad(x)]=0$, da cui $ad(\delta(x))=0$, $\forall x\in L$, da cui $\delta=0$, cioè $I^\perp=\{0\}$. Ma da questo segue $Der(L)=I$, perché $\dim(I)\geq \operatorname{codim}_{Der(L)}(I^\perp)$ (essere in $I^\perp$ è descritto da un sistema di $\dim(I)$ equazioni).

$\square$

<u>Corollario</u>: Se L è semisemplice, c'è una decomp. di J.-C. „astratta", cioè $\forall x\in L \ \exists!\ x_s, x_n\in L \mid x=x_s+x_n$, $ad(x_s)$ è semis., $ad(x_n)$ nilpot., $[x_s,x_n]=0$.

<u>Dim.</u>: Dimostriamo che $ad(x)_s, ad(x)_n\in ad(L)$, facendo vedere che $ad(x)_s\in Der(L)$ (e allora anche $ad(x)_n\in Der(L)$).

Decomp. $L = \bigoplus_{\alpha \in k} L_\alpha$ in autosp. gen., poniamo $D = ad(x)_s$

Sappiamo $D(v) = \alpha v$ $\forall v \in L_\alpha$. Osserviamo prima di tutto che

$[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$ (verifica: esercizio, vale per autospazi e autosp. generalizzati, usando la formula

$$\left(D-(\alpha+\beta)\right)^m([a,b]) = \sum_i \binom{m}{i} \left[(D-\alpha)^i a, (D-\beta)^{m-i} b\right] = 0 \quad \text{se } D \text{ è una derivaz.})$$

verifica elem. per induzione su m

Allora $D([a,b]) = (\alpha+\beta)[a,b] = [\alpha a, b] + [a, \beta b] = [D(a), b] + [a, D(b)]$

e segue che D è una derivazione. Quindi $\exists\, x_s \mid ad(x_s) = ad(x)_s$, e

$\exists\, x_n = x - x_s \mid ad(x_n) = ad(x)_n$. Tutte le propr. volute di x_s, x_n valgono,

infatti $ad([x_s, x_n]) = [ad(x)_s, ad(x)_n] = 0$ e ad è iniettiva. $\square$

Altre consid. sulle rappr. di alg. di Lie

Def: Siano V, W spazi vettoriali. Un'appl. bilineare $V \times W \to P$ è detta prod. tensoriale di V e W se $\forall\, q: V \times W \to Q$ bil. con Q sp. vett. $\exists!\, r: P \to Q$ lineare tale che

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & Q \\ & P \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $q = r \circ p$.

Prop.: P esiste ed è unico a meno di isom.. Si denota con $V \otimes W$, e $p(v,w)$ si denota con $v \otimes w$, e una base di P si ottiene con i vettori $v_i \otimes w_j$ dove i v_i formano una base di V e w_j di W.

Dim.: Sia $P = \mathrm{Span}\{v_i \otimes w_j\}$ e definiamo

$$\begin{aligned} V \times W &\to P \\ (v_i, w_j) &\mapsto v_i \otimes w_j \end{aligned}$$, estesa per linearità.

Data $q: V \times W \to Q$, basta porre $r(v_i \otimes w_j) = q(v_i, w_j)$.

$\square$

Oss.: 1) Se V e W hanno dim. finita allora $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$, tramite $\eta \otimes w \mapsto (v \mapsto \eta(v) w)$.

2) Gli elem. di $V \otimes W$ sono comb. lin. di vettori del tipo $v \otimes w$ con $v \in V$, $w \in W$.

Esercizio: 1) Un $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ si scrive come $\eta \otimes w$ se e solo se ha rango 1.

2) La traccia di $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$ corrisponde a $\eta \otimes v \mapsto \eta(v)$.

Def.: Se V, W sono G-moduli (G = gruppo), $V \otimes W$ ha struttura naturale di G-modulo con $g.(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw)$. Se sono L-moduli (L = alg di Lie) allora si pone $x.(v \otimes w) = (xv) \otimes w + v \otimes (x.w)$.

Inoltre $\mathrm{Hom}(V,W)$ è un G-modulo con $(g.f)(v) = g \cdot f(g^{-1}v)$ e un L-modulo con $(x.f)(v) = f(-xv) + x.f(v)$.

Lemma (Schur): Se V è un L-modulo irriducibile, allora $(\varphi: L \to gl(V))$

$$Z_{gl(V)}(\varphi(L)) = k \cdot Id_V$$

Dim.: $\supseteq$) ovvio.

$\subseteq$) Sia $y \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$, y ha un autosp. $W \subseteq V$ di autovalore α. $W \neq \{0\}$

Allora W è L-stabile, perché $\forall x \in L, \forall v \in W$

$$y(x.v) = x.(yv) = x.(\lambda v) = \lambda x.v.$$

Segue $W = V$ e $y = \alpha \cdot Id_V$. $\square$

Elem. di Casimir di una rappr.

Sia $\varphi: L \to gl(V)$ rappr., supp. L e V di dim. finita, φ fedele ($=$ iniettiva).

Def.:
$$b_\varphi : L \times L \to k$$
$$(x, y) \mapsto tr(\varphi(x)\varphi(y))$$

Proprietà:
1) associatività $b_\varphi([x,y], z) = b_\varphi(x, [y,z])$
2) il nucleo $\{x \mid b_\varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in L\}$ è un ideale di L.
3) se L è semisemplice b_φ è non degenere.

(dim. come per κ_L).

Def.: Sia L semisemplice, φ rappr. fedele, sia $(x_1, \dots, x_n)$ base di L, $(y_1, \dots, y_n)$ base duale rispetto a b_φ, cioè $b_\varphi(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. L'<u>elem. di Casimir</u> di φ è

$$c_\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\varphi(y_i)$$

Oss.: Se $(x_1', \dots, x_n')$ è un'altra base di L, $(y_1', \dots, y_n')$ base duale, poniamo

$$x_i' = \sum_{l=1}^{n} a_{li} x_l \,, \qquad A = (a_{ij}) \text{ matr. del camb. di base.}$$

$$y_i' = \sum_{l=1}^{n} b_{li} y_l \,, \qquad B = (b_{ij}) \text{ — , —}$$

Allora $\delta_{ij} = b_\varphi(x_i', y_j') = \sum_{l,m} a_{li} b_{mj} b_\varphi(x_l, y_m) = \sum_l a_{li} b_{lj}$

da cui $B = {}^tA^{-1}$.

Segue
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i')\varphi(y_i') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l,m=1}^{n} a_{li}\varphi(x_l) b_{mi} \varphi(y_m) =$$
$$= \sum_{l,m=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{li} b_{mi}\right)}_{=\delta_{lm}} \varphi(x_l)\varphi(y_m) = \sum_{l=1}^{n} \varphi(x_l)\varphi(y_l)$$

cioè c_φ non dip. dalla scelta della base.

Lemma: $c_\varphi \in Z_{gl(V)}(\varphi(L))$