PARTE PRIMA: GRUPPI DI LIE DI MATRICI

Definizioni e prime osservazioni

Definizione: Un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico, e tale che l'operazione di gruppo

$$G \times G \longrightarrow G \qquad (g, h) \longmapsto gh$$

e l'inverso

$$G \longrightarrow G \qquad g \longmapsto g^{-1}$$

sono applicaz. continue.

Esempi: 1) Gli esempi già visti sono tutti gruppi topologici (topologia come sottospazio di $\mathbb{R}^{n^2}$ o $\mathbb{C}^{n^2}$, dove mettiamo la topologia euclidea)

2) $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo topologico ma non una varietà differenziabile, quindi non è un gruppo di Lie.

Osservazione: Sia $g \in G$, allora sono definite la traslazione a sinistra e a destra per g:

$$L_g : G \longrightarrow G \qquad x \longmapsto gx \qquad \text{e} \qquad R_g : G \longrightarrow G \qquad x \longmapsto xg$$

Sono applicazioni continue, vediamo la dimostrazione per L_g:

consideriamo

$$\tilde{m} : \{g\} \times G \longrightarrow G \qquad (g, x) \longmapsto gx$$

è continua, perché è la restrizione al sottosp. $\{g\}\times G$ della moltiplicaz., che è continua

D'altronde $\{g\}\times G$ è omeomorfo a G tramite la seconda proiezione

$$p: \{g\}\times G \to G \quad , \qquad \text{e l'inversa}$$
$$(g, x) \mapsto x$$

$\psi : G \to \{g\}\times G$ soddisfa:

$$L_g = \tilde{m} \circ \psi \,, \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "L_g"'] & \{g\}\times G \arrow[r, "\tilde{m}"] & G \end{tikzcd}$$

quindi L_g è continua e biiettiva.

La dimostrazione per R_g è simile.

Inoltre L_g e R_g sono omeomorfismi, perché le inverse sono rispettivamente $L_{g^{-1}}$ e $R_{g^{-1}}$.

Inoltre anche il coniugio $\begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gxg^{-1} \end{array}$ è un omeomorfismo

di G in se stesso, perché è $L_g \circ R_{g^{-1}} \left(= R_{g^{-1}} \circ L_g\right)$.

Notazione: $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$, sul G.-W. invece γ_g si denota con $\tau(g)$.

Oss.: Dato G un gruppo topologico e $H \subseteq G$ un sottogruppo, possiamo mettere su H la topologia di sottospazio, e con essa H è sempre un gruppo topologico.

Definizione: Sia G gruppo topologico, e H un sottogruppo. Allora H si dice sottogruppo topologico di G se è un chiuso di G. (Spesso si dice anche semplicemente sottogruppo chiuso.)

Esempi: 1) Gli esempi visti prima di sottogruppi di $GL(n, F)$ sono tutti sottogruppi chiusi (attenzione: chiusi in $GL(n, F)$!), infatti sono tutti dati da equazioni polinomiali.

2) $(\mathbb{Q}, +)$ non è un sottogruppo topologico di $(\mathbb{R}, +)$, perché non è un sottoinsieme chiuso.

Osservazione: Dimostreremo che un sottogruppo chiuso di $GL(n, F)$ è automaticamente una sottovarietà differenziabile, e ha una struttura naturale di gruppo di Lie.

Dimostrare questo è uno degli obiettivi della prima parte del corso.

Def.: Un omomorfismo di gruppi topologici $f: G \to H$ è un omomorfismo di gruppi che è anche un'appl. continua.
Una tale f è un isomorfismo di gruppi topologici se è un isomorfismo di gruppi e anche un omeomorfismo.
(Si vede facilmente che f è isom. di gr. topol. se e solo se f è omomorf. di gr. topol. biiettivo e f^{-1} è anch'esso omomorfismo di gr. topol.).

Proposizione: Sia H un sottogruppo di un gruppo topologico G. Se H è aperto, allora H è chiuso.

Dim.: Scriviamo G come unione disgiunta delle classi laterali sinistre gH di H, al variare di $g \in G$.

D'altronde $gH = L_g(H)$, e L_g è omeomorfismo, per cui gH è aperto in G. Ora $G \setminus H$ è l'unione delle classi laterali diverse da H, quindi $G \setminus H$ è aperto e H è chiuso. $\square$

Proposizione: Sia G gruppo topologico, e G° la componente connessa contenente l'elem. neutro $e = e_G \in G$. Allora G° è un sottogruppo normale chiuso di G.

Dim.: Le componenti connesse sono sempre chiuse, verifichiamo che G° è un sottogruppo. Fissiamo $h \in G^\circ$ e consideriamo $hG^\circ = L_h(G^\circ)$: è una componente connessa di G, e contiene $h = h \cdot e_G$, quindi interseca G° e segue che $hG^\circ = G^\circ$. Segue: il prodotto di elem. di G° è in G°.

Inoltre, dato $h \in G^\circ$ abb. anche dim. che $hG^\circ = G^\circ$, e da questo segue anche che esiste $k \in G^\circ$ tale che $h \cdot k = e_G \in G^\circ$, ma allora $k = h^{-1}$, e quindi G° è un sottogruppo.

Rimane da dim che G° è normale, quindi sia $g \in G$ e consid. $gG^\circ g^{-1} = \gamma_g(G^\circ)$, abb. che $gG^\circ g^{-1}$ è allora una comp. connessa che interseca G° (almeno in e_G), quindi è uguale a G°, e allora G° è un sottogruppo normale. $\square$

Mappa esponenziale su matrici

Consideriamo $M_n(\mathbb{R})$ identificandolo con $\mathbb{R}^{n^2}$.

Il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^{n^2}$ si può scrivere facilmente in termini di matrici.

Date due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

il prodotto scalare fra A e B sarebbe $a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + \ldots + a_{nn} b_{nn}$.

Esso è anche uguale a $tr(A \cdot {}^t B)$. Infatti: chiamiamo c_{ij} le entrate di $A \cdot {}^t B$, allora

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{jk}}$$

se avessi $A \cdot B$ qui sarebbe b_{kj}

La sua traccia è $c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{nn} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{1k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{2k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{nk}$$

ed è uguale al prodotto scalare.

Per matrici in $M_n(\mathbb{C})$ si può fare la stessa cosa: il prodotto Hermitiano standard $a_{11} \overline{b_{11}} + a_{12} \overline{b_{12}} + \ldots + a_{nn} \overline{b_{nn}}$ è uguale a $tr(A \cdot {}^t \overline{B})$.

La norma solita corrispondente $\|\cdot\|$ soddisfa:

1) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\quad \|cA\| = |c| \cdot \|A\|$

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$\forall c \in \mathbb{C}$

2) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

3) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

E' da verificare 3):

$$\|A \cdot B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\text{elem. } (i,j) \text{ di } A \cdot B)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right) =$$

$$= \underset{(i=1)}{\left(a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots \right)} \underset{(j=1)}{\left(b_{11}^2 + b_{21}^2 + \dots \right)} + \underset{(i=2)}{\left(a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots \right)} \underset{(j=1)}{\left(b_{11}^2 + b_{21}^2 + \dots \right)} + \dots$$

(raccolgo le somme dei b con stesso j)

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k1}^2 \right) + \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k2}^2 \right) + \dots$$

uguali

$$= \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \cdot \left(\sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}^2 \right) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 .$$

Quindi 3) è vera.

Vogliamo definire e^A con $A \in M_n(\mathbb{C})$ usando la serie di potenze solita dell'esponenziale, vediamo prima un lemma che vale per qualsiasi serie.

<u>Lemma</u>: Sia $a: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ successione di numeri complessi tale che $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| r^m < +\infty$ per un r reale positivo.

Allora $f(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m X^m$ è una matrice ben definita per ogni $X \in M_n(\mathbb{C})$ tale che $\|X\| < r$.

Inoltre f così definita è una funzione continua.

<u>Dim.</u>: Dimostriamo che la successione delle somme parziali è di Cauchy: dati $\forall$ indici $l > k$ consid.

$$\left\| \sum_{m=0}^{l} a_m X^m - \sum_{m=0}^{k} a_m X^m \right\| = \left\| \sum_{m=k+1}^{l} a_m X^m \right\| \leq$$

$$\sum_{m=k+1}^{l} |a_m| \cdot \|X^m\| \leq \sum_{m=k+1}^{l} |a_m| \cdot \|X\|^m \leq \underbrace{\sum_{m=k+1}^{l} |a_m| r^m}_{\text{distanza fra due termini di una succ. convergente}}$$

Quindi la successione delle somme parziali è di Cauchy, e quindi f è ben definita.

Lo stesso conto mostra che f è limite puntuale di una successione di funzioni continue di X (le somme parziali) che convergono uniformemente, quindi f è continua.

$\square$

<u>Def.</u>: Definiamo l'esponenziale e il logaritmo di matrici:

$$e^X = \exp(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} X^m,$$

$$\log(I_n + X) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} X^m.$$

L'esponenziale converge nel senso del lemma per tutte le $X \in M_n(\mathbb{C})$,
il logaritmo converge —"— per $\|X\| < 1$.

Questo definisce due funzioni continue

$$\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

$$\log : B_1(I_n) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

$$B_1(I_n) = \{ Y \in M_n(\mathbb{C}) \mid \|Y - I_n\| < 1 \}$$