TOKEN: 791460

Esercizi foglio n. 4

Es. 1: $T \in End(V)$, $\alpha, \beta \in k$ autovalori di T, $\alpha \neq \beta$,

$V = V_\alpha \oplus W$, $T(W) \subseteq W$

autosp. generalizz.

Da dim.: $V_\beta = W_\beta$

$\supseteq$ Ovvio

$\subseteq$ Sia $v \in V_\beta$, dim. che $v \overset{(?)}{\in} W_\beta$. Decomp. $v = u + w$ con $u \in V_\alpha$, $w \in W$. Sappiamo $(T-\beta)^m v = 0$ se m è abb. grande.

cioè $(T-\beta)^m u + (T-\beta)^m w = 0$

Oss.: V_α e W sono stabili per T e $\beta (= \beta \cdot Id)$, quindi

$(T-\beta)^m u \in V_\alpha$, $(T-\beta)^m w \in W$.

Quindi per m abb. grande $(T-\alpha)^m u = 0 = (T-\beta)^m u$.

Consid. i polinomi $(x-\alpha)^m, (x-\beta)^m \in k[x]$, sono primi fra loro, quindi esistono $p(x), q(x) \in k[x] \mid p(x)(x-\alpha)^m + q(x)(x-\beta)^m = 1$

Segue $p(T)(T-\alpha)^m + q(T)(T-\beta)^m = Id$, cioè

$(p(T)(T-\alpha)^m + q(T)(T-\beta)^m)u = u$

ma il 1° membro è 0, cioè $u=0$. Segue $v = w \in W_\beta$.

Altro svolgimento: Dimostriamo che $u=0$ senza usare polinomi, e oss. che se u è già autovettore di autovettore α non può essere autovett. gen. di autovalore β, perché:

$$(T-\beta)^m u = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-\beta)^i T^{m-i} u = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-\beta)^i \alpha^{m-i}\right) u =$$

$$= (\alpha-\beta)^m u$$

Se è $=0$ per qualche $m \geq 1$ allora $\alpha = \beta$, assurdo.

In generale: Supp. $u \neq 0$ e sia m tale che $(T-\alpha)^m u = 0$ ma $(T-\alpha)^{m-1} u \neq 0$, e definiamo $\tilde{u} = (T-\alpha)^{m-1} u$. Allora $\tilde{u}$ è autovettore di autovalore α, e $(T-\beta)^r \tilde{u} = (T-\beta)^r (T-\alpha)^{m-1} u =$

$$= (T-\alpha)^{m-1} (T-\beta)^r u = 0 \quad \text{se } r \text{ è abb. grande.}$$

Segue: $\tilde{u}$ autovett. gen. di autovalore β: assurdo (per il passo precedente).

Es. 2: Siano $X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$ (dim. finita), dim. che $(X+Y)_s = X_s + Y_s$, $(X+Y)_n = X_n + Y_n$ se $[X,Y]=0$

Osserviamo: $X+Y = (X_s+Y_s) + (X_n+Y_n)$. Visto che X_s è un pol. in X, e Y_s è un polinomio in Y, abb. $X_s Y_s = Y_s X_s$, quindi X_s e Y_s sono diagonalizzabili simultaneamente, quindi $X_s + Y_s$ è semisemplice.
Altrettanto: $X_n Y_n = Y_n X_n$ quindi $X_n + Y_n$ nilpotente, e $X_s + Y_s$ commuta con $X_n + Y_n$, quindi sono risp. $(X+Y)_s$ e $(X+Y)_n$, per l'unicità.

Esempio in cui $[X,Y]\neq 0$: $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $X_s=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $X_n=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$Y=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$, $Y_s=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $Y_n=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

Ora $X_s+Y_s=0$, ma $X+Y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ non è nilpotente (è semisemplice)

Es. 3

$$K_{sl(2)}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&8&0\\4&0&0\end{pmatrix}$$

Es. 4: L = alg. di Lie di dim. finita nilpotente, dim. che $tr(ad(x)ad(y))=0$ $\forall x,y\in L$

Usiamo il 1° teo. di punto fisso con $ad(L)$: c'è una base in cui $ad(x)$ e $ad(y)$ sono in $\underset{\nwarrow \dim(L)}{\mathfrak{n}(n)}$, allora $ad(x)ad(y)\in\mathfrak{n}(n)$. Quindi

$$tr(ad(x)ad(y))=0$$

Es. 5: L = risolubile di dim. finita, dim. che $tr(ad(x)ad(y))=0$ $\forall x\in[L,L]$ $\forall y\in L$

Usiamo il teorema di Lie: c'è una base di L in cui $ad(L)\in\mathfrak{b}(n)$.

Segue $ad(x)\in\mathfrak{n}(n)$, quindi $ad(x)ad(y)\in\mathfrak{n}(n)$. Anche qui $tr(ad(x)ad(y))=0$.

Teoria:

Avevamo visto:

Teorema: L alg. di Lie di dim. finita: L semisemplice $\iff K_L$ è non degenere.

Abb. visto: $R = \{ x \mid K_L(x,y) = 0 \ \forall y \in L \}$ è un ideale di L.

Inoltre R è risolubile, per il criterio di Cartan.

<u>Dim. teorema:</u> $\Rightarrow$) Se L è semisemplice allora $R = \{0\}$ per def., e segue K_L non degenere.

$\Leftarrow$) Supp. K_L non degenere, cioè $R = \{0\}$, ma per assurdo $\underline{Rad(L) \neq \{0\}}$.

Scegliamo $x \neq 0$ in $Rad(L)$, ma più precisamente $x \in \underline{Rad(L)^{(m)}} \neq \{0\}$ tale che $Rad(L)^{(m+1)} = \{0\}$.

Osserviamo che $I = Rad(L)^{(m)}$ è un ideale non nullo di L, ed è abeliano.

Sia allora $x \in I$, $y \in L$, calcoliamo le potenze di $ad(x)ad(y)$:

$$L \xrightarrow{ad(y)} L \xrightarrow{ad(x)} I \xrightarrow{ad(y)} I \xrightarrow{ad(x)} \{0\}$$

cioè $(ad(x)ad(y))^2 = 0$, e allora $tr(ad(x)ad(y)) = 0$.

Segue: $x \in R$, assurdo. $\square$

Def: Date due algebre di Lie L_1, L_2 (qualsiasi), la somma diretta $L_1 \oplus L_2$ è un'algebra di Lie su $L_1 \times L_2$, con bracket

$$[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = ([a_1, b_1], [a_2, b_2])$$

Oss.: L_1 e L_2 sono identificate con $L_1 \times \{0\}$ e $\{0\} \times L_2$ rispettivam., e con questa identificazione sono ideali di $L_1 \oplus L_2$.

Teorema: Sia L algebra di Lie. L è semisemplice se e solo se è somma diretta di algebre di Lie semplici (di dim. finita):

$$L = L_1 \oplus \_ \oplus L_t$$

(è ammesso il caso $t=0$, cioè $L=\{0\}$).

In tal caso, gli $L_1, -, L_t$ sono univocam. determinati essendo gli ideali di L che sono algebre di Lie semplici.

Oss.: 1) In analogia con teoria delle rappr., spesso un L-modulo compl. riducibile ammette più di una decomp. in somma diretta di irriducibili; ad es. se $V_1 = V_2$ allora $V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus (\text{diagonale})$

sottomoduli

Qui invece anche se ad es. $L_1 = L_2$, è vero che la diagonale in $L_1 \oplus L_2$ è una sottoalgebra ma non è un ideale, e la decomp. è unica.

2) Si può pensare che un'algebra di Lie non semisemplice $\neq \{0\}$ abbia almeno sempre un ideale semplice, ad es. un ideale non nullo minimale.

Ma questo rischia di essere abeliano. Infatti ad es. $\mathfrak{b}(n)$ o $\mathfrak{n}(n)$ non hanno ideali semplici.

Dim. del teorema: $\Leftarrow$) Consid. $Rad(L)$ e $\pi_i(Rad(L))$ $\forall i$, dove $\pi_i : L \to L_i$ è la proiezione. Abb. $\pi_i(Rad(L))$ è un ideale risolubile di $Im(\pi_i) = L_i$, segue $\pi_i(Rad(L)) = \begin{cases} \{0\} & \text{opp.} \\ L_i \end{cases}$

Ma se $\pi_i(Rad(L)) = L_i$ allora la sua derivata è $\{0\}$, cioè L_i abeliano, assurdo. Segue: $Rad(L) = \{0\}$, cioè L semisemplice.

$\Rightarrow$) Sia L semisemplice $\neq \{0\}$, sia I ideale $\neq \{0\}$ minimale. Visto che L è semisemplice, I non è risolubile. Consid.
$I^\perp = \{ y \in L \mid \underline{K_L(x,y) = 0} \ \forall x \in I \}$.
Sappiamo $\dim(I^\perp) + \dim(I) = \dim(L)$, studiamo $I \cap I^\perp$.
Abb. $I^\perp$ è un ideale, per l'associatività di K_L: dati $x \in I^\perp$, $y \in L$, $z \in I$:

$$K_L([x,y], z) = K_L(\underset{I^\perp}{x}, \underbrace{[y,z]}_{I}) = 0$$

Allora $I \cap I^\perp$ è un ideale, e la forma di $\overset{\text{di } L}{\underline{\text{killing}}}$ è zero su $\underline{I \cap I^\perp} = J$
voglio concludere che K_J è nulla. Devo confrontare $K_J = K_L|_{J \times J}$:
calcoliamo le matrici di $ad(x)$ con $x \in J$ rispetto a una base di L ottenuta completando una base di J:

$$ad(x) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

base di J

qui ho zeri perché $ad(x)(L) \subseteq J$

Dati $x, y \in J$, anche $ad(x)ad(y)$ ha matrice di questa forma, per cui $K_L(x,y) = K_J(x,y)$, cioè $K_L\big|_{J\times J} = K_J$.

Segue: K_J è nulla, quindi J è risolubile per il criterio di Cartan. Cioè $J = \{0\}$ perché L è semisemplice. Allora

$$L = I \oplus I^\perp$$ come spazi vettoriali, ma anche

come algebre di Lie (perché $[I, I^\perp] \subseteq I \cap I^\perp$ e quindi $[I, I^\perp] = \{0\}$).

Concludiamo anche che ogni ideale di I è ideale anche di L, quindi I è un'algebra di Lie semplice (I non è abeliano perché non è risolubile).

Poniamo $I = L_1$ e per induzione su $\dim(L)$ abb. $I^\perp = L_2 \oplus \dots \oplus L_t$.

Cioè $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_t$.

Rimane da dim. che gli $L_1, \dots, L_t$ sono gli "ideali semplici" di L, quindi sia M un ideale di L, alg. semplice. Allora

$$[L, M] = \begin{cases} \{0\} & \text{opp.} \\ M \end{cases}$$ ma $[L,M] = \{0\}$ implica $M \subseteq Z(L)$: assurdo.

Cioè $[L, M] = M$, e allora $[L_1 \oplus \dots \oplus L_t, M] = M =$

$$= [L_1, M] \oplus \dots \oplus [L_t, M]$$

Segue: $[M, L_i] = M$ per un $i \in \{1, \dots, t\}$, da questo segue $L_i \supseteq M$ e allora $M = L_i$.

$\square$