TOKEN 368613

Continuiamo con la dim.:

5) Sia $T = T_s' + T_n'$ con T_s', T_n' che soddisfano 1), 2), 3).

Sappiamo T_s, T_s', T_n, T_n' sono tutti pol. in T, quindi commutano tutti. Allora

a) $T_n - T_n'$ è nilpotente

b) $T_s - T_s'$ è semisemplice (perché endom. diagonalizzabili che commutano si possono diagonalizzare simultaneamente).

Allora $T_n - T_n' = T_s' - T_s$ è nilpotente e semisemplice, quindi è nullo, cioè $T_n = T_n'$ e $T_s = T_s'$.

$\square$

Fine parentesi di algebra lineare.

Teorema (criterio di Cartan): Sia $L \subseteq gl(V)$ (di dim. finita) algebra di Lie.

Supponiamo $tr(xy) = 0 \quad \forall x \in L, \forall y \in [L,L]$.

Allora L è risolubile.

Per la dim.:

Lemma 1: Sia $x \in gl(V)$ (V come sopra), consid. $ad(x) \in gl(gl(V))$.

Vale $ad(x_s) = ad(x)_s$, $\quad ad(x_n) = ad(x)_n$

Dim.: Abbiamo $ad(X) = ad(X_s) + ad(X_n)$, e $ad(X_s) \circ ad(X_n) = ad(X_n) \circ ad(X_s)$ perché X_s, X_n commutano (verifica: esercizio).

Sappiamo già anche che $ad(X_n)$ è nilpotente, rimane da dim. $ad(X_s)$ è semisemplice. Scegliamo una base di V in cui

$$X_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

è diagonale, e calcoliamo $ad(X_s)$ nella base $(e_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ di $gl(V) = gl(n)$.

Si vede:

$$ad(X_s)(e_{ij}) = X_s e_{ij} - e_{ij} X_s = (\alpha_i - \alpha_j) e_{ij}$$

(verifica: esercizio) quindi $ad(X_s)$ è diagonale in questa base, con autovalori $\alpha_i - \alpha_j$. $\square$

Lemma 2: Siano $A \subseteq B \subseteq gl(V)$ sottosp. vettoriali, e sia

$$M = \{ x \in gl(V) \mid [x, B] \subseteq A \}.$$

Se $y \in M$ soddisfa

$$tr(yz) = 0 \quad \forall z \in M$$

allora y è nilpotente.

Dim.: Dobb. dim. che $y_s = 0$. Poss. supporre y_s diagonale:

$$y_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Sappiamo $ad(y)(B) \subseteq A$, quindi ogni polinomio in $ad(y)$ manda B in A, se non ha termine noto. In particolare $ad(y)_s(B) \subseteq A$, e allora $y_s \in M$ perché $ad(y)_s = ad(y_s)$

per il lemma 1.

Prendiamo di nuovo $f(x) \in k[x]$ senza termine noto, allora anche $f(\underbrace{ad(Y_s)})$ manda B in A. Nella base e_{ij} delle matr. elem., $ad(Y_s)$ è diagonale con autovalori $\underline{\alpha_i - \alpha_j}$ come nella dim. prec. Quindi $f(ad(Y_s))$ è diagonale con autovalori $f(\alpha_i - \alpha_j)$. Cerco f tale che $f(ad(Y_s))$ è $ad(\text{qualcosa})$, questo produrrà altri elem. di M oltre a Y e Y_s.

Supponiamo $f(\alpha_i - \alpha_j) = \underline{\beta_i - \beta_j}$ per certi $\beta_1, \dots, \beta_n \in k$.

allora $f(ad(Y_s)) = ad(Z)$ dove $Z = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$,

per lo stesso ragionam. di prima fatto con Z invece che con Y_s.

In questo caso $Z \in M$, calcoliamo $tr(YZ)$. Usiamo:

Y_s, Z commutano, $ad(Z)$ e $ad(Y)$ commutano, perché $ad(Z)$ è un pol. in $ad(Y_s)$, che è un pol. in $ad(Y)$. Allora

$[Z, Y] \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{di } gl(V)}}{ker(ad)}$, e $ker(ad) = Z(gl(V)) = k \cdot Id_V$.

Cioè $[Z,Y]$ è una matrice scalare a $\underbrace{\text{traccia nulla}}_{\text{perché è un bracket}}$,

cioè $[Z,Y] = 0$. Segue che Z commuta anche con Y_n.

Abbiamo: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{entrambi in } M}}{0 =} tr(YZ) = tr(Y_s Z) + tr(\underbrace{Y_n Z}_{\text{nilpotente}}) = tr(Y_s Z) =$

$$= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

Vogliamo dedurre che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ma possiamo usare solo delle scelte di $\beta_1, \dots, \beta_n$ per cui ci sia un polinomio $f \in k[x]$ tale che $f(\alpha_i - \alpha_j) = \beta_i - \beta_j$. Sembra una specie di linearità di f ma solo su $\mathbb{Z}$, non su k.

Allora prendiamo $\eta : \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \{\underline{\alpha_1, \dots, \alpha_n}\} \to \mathbb{Q}$, e osserviamo che esiste sicuramente $f \in k[x]$ tale che $f(\alpha_i - \alpha_j) = \eta(\alpha_i) - \eta(\alpha_j)$.

Questo è vero perché $k \supseteq \mathbb{Q}$ e se $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_s - \alpha_r$ allora $\eta(\alpha_i) - \eta(\alpha_j) = \eta(\alpha_i - \alpha_j) = \eta(\alpha_s - \alpha_r) = \eta(\alpha_s) - \eta(\alpha_r)$. Impongo anche $f(0) = 0$, e ottengo

$$0 = \alpha_1 \eta(\alpha_1) + \dots + \alpha_n \eta(\alpha_n) \qquad \forall \eta \text{ come prima}$$

Calcoliamo η: $\quad 0 = \eta\left(\alpha_1 \underline{\eta(\alpha_1)} + \dots + \alpha_n \underline{\eta(\alpha_n)}\right) =$

$$= \eta(\alpha_1)^2 + \dots + \eta(\alpha_n)^2 .$$

Segue: $\eta(\alpha_1) = \dots = \eta(\alpha_n) = 0$. Però η è un qualsiasi funzionale su $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, segue $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{0\}$, cioè

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. $\square$

<u>Dim. criterio di Cartan:</u> Usiamo il teo. di Engel per dim. che $[L, L]$ è nilpotente. Usiamo il lemma 2 con

$A = [L,L]$, $B = L$. Qui

$M = \{ x \in gl(V) \mid [x, L] \subseteq [L,L] \}$

Chiaram. $L \subseteq M$. Sappiamo $tr(yz) = 0$ $\forall z \in [L,L], \forall y \in L$,

vorremmo $tr(xz) = 0$ $\forall x \in M$.

Abb.:
$$tr(x\underset{\in[L,L]}{z}) = tr\left(x \cdot \sum_i [\underset{L}{z_i}, \underset{L}{w_i}]\right) = \sum_i tr(x \cdot [z_i, w_i]) =$$

$$= \sum_i tr(\underbrace{[x, z_i]}_{\in[L,L]} \cdot w_i) = 0$$

(attenzione x non è nec. in L, ma è in M quindi $[x, z_i] \in [L,L]$)

($tr(a \cdot [b,c]) = tr([a,b]c)$ $\forall a,b,c \in gl(n)$, verifica per esercizio)

Allora poss. applicare il lemma 2 e otteniamo z nilpotente $\forall z \in [L,L]$.
Per il teo. di Engel deduciamo $[L,L]$ nilpotente, e L risolubile.

$\square$

<u>Corollario:</u> Sia L alg. di Lie di dim. finita. Se $tr(ad(x)ad(y)) = 0$ $\forall x \in [L,L]$ $\forall y \in L$ allora L è risolubile.

<u>Dim.:</u> Per il criterio visto, $ad(L)$ è risolubile, cioè $\frac{L}{Z(L)}$ è risolubile. $Z(L)$ è abeliano, quindi L è risolubile.

$\square$

SEMISEMPLICITA'

Def: Sia L alg. di Lie di dim. finita. La <u>forma di Killing</u> di L è

$$\kappa_L : L \times L \longrightarrow k$$
$$(x, y) \longmapsto tr(ad(x)ad(y))$$

Oss.: 1) κ_L è bilineare

2) κ_L è <u>associativa</u>, nel senso che

$$\kappa_L(x, [y,z]) = \kappa_L([x,y], z) \quad \forall x, y, z \in L$$

(dim. come prima)

Esempio: $\kappa_{sl(2)}$ nella base (e, h, f) ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

in particolare, κ_L è non degenere.

Teorema: L semisemplice $\Longleftrightarrow$ κ_L è non degenere.

Per la dim.:

Lemma: Sia L qualsiasi, e consid. $R = \{ x \in L \mid \kappa_L(x,y) = 0 \ \forall y \in L \}$

R è un ideale di L.

Dim.: Sia $x \in R$, $z \in L$, verifichiamo che $[x,z] \in R$, cioè sia $y \in L$:

$$\kappa_L([x,z], y) = \kappa_L(x, [z,y]) = 0 \quad \text{cioè } [x,z] \in R. \qquad \square$$