TOKEN: 615408

Esercizi dal foglio n. 3

ES. 2: Sappiamo già $ad(\mathfrak{sl}(2)) \subseteq Der(\mathfrak{sl}(2))$ $\Big(\subseteq \underbrace{\mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}(2))}_{\substack{\| \\ \mathfrak{gl}(3)}}\Big)$ usando la base (e, h, f)

Dim. "$\supseteq$", quindi sia $\delta \in Der(\mathfrak{sl}(2))$,

in coordinate:

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \\ \cdots & & \end{pmatrix}$$

(cioè $\delta(e) = a_{11} e + a_{21} h + a_{31} f$, ecc...)

Usiamo:

$$\delta(e) = \delta\left(\frac{1}{2}[h, e]\right) = \frac{1}{2}\Big([\delta(h), e] + [h, \delta(e)]\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big([a_{12} e + a_{22} h + a_{32} f, e] + [h, a_{11} e + a_{21} h + a_{31} f]\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2 a_{22} e - a_{32} h + 2a_{11} e - 2a_{31} f\Big)$$

d'altronde questo è uguale a $a_{11} e + a_{21} h + a_{31} f$.

Segue $a_{22} = 0$, $a_{31} = 0$, $2a_{21} = -a_{32}$.

Facendo lo stesso con $h = [e, f]$ e $2f = [f, h]$ otteniamo

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & -2a_{23} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & -2a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \frac{a_{11}}{2} ad(h) + a_{23} ad(e) - a_{21} ad(f)$$

Es. 3: Supp. L nilpotente, I ideale $\neq \{0\}$. Dim. che $\dim([L,I]) < \dim(I)$.

Per assurdo $\dim([L,I]) = \dim(I)$. Segue $[L,I] = I$.

Allora $[L,[L,I]] = [L,I] = I$, per induzione:

$$I = [\underbrace{L,[L,\dots,[L}_{n \text{ volte}},I]\dots]]$$ Questo è contenuto in L^{n-1}: assurdo.

Es 4: 1) Da dim.: $N_{\mathfrak{gl}(n)}(\mathfrak{b}(n)) = \mathfrak{b}(n)$, $N_{\mathfrak{gl}(n)}(\mathfrak{h}(n)) = \mathfrak{h}(n)$.

Usiamo: $x \in \mathfrak{gl}(n)$, abb.:

$$Y = \left[\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, x\right] = \begin{array}{l} \\ \text{posto } i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\text{i-esima riga di } x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{array}{c} \text{posto } i \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{i-esima colonna di } x \end{array}$$

posto i-esimo

quindi se $Y \in \mathfrak{b}(n)$ allora $x \in \mathfrak{b}(n)$ (questo dimostra che $N(\mathfrak{b}(n)) = \mathfrak{b}(n)$)

e se $Y \in \mathfrak{h}(n)$ allora $x \in \mathfrak{h}(n)$ (——— " ——— $N(\mathfrak{h}(n)) = \mathfrak{h}(n)$).

2) Da dim. che $N_{\mathfrak{gl}(n)}(\mathfrak{n}(n)) = \mathfrak{b}(n)$.

Sappiamo $[\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)] = \mathfrak{n}(n)$, cioè $\mathfrak{n}(n)$ è ideale di $\mathfrak{b}(n)$, per cui

$N_{\mathfrak{gl}(n)}(\mathfrak{n}(n)) \supseteq \mathfrak{b}(n)$, va dim. „$\subseteq$".

Come prima, sia $x \in N_{\mathfrak{gl}(n)}(\mathfrak{n}(n))$, allora $\left(x = \begin{pmatrix} a & b & \dots \\ c & d & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \right)$

$$Y = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}, x\right] = \begin{pmatrix} c & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

e $Y \in \mathfrak{n}(n)$, il che implica $c=0$. Si prosegue con altre matrici elementari in $\mathfrak{n}(n)$ e si conclude $X \in \mathfrak{b}(n)$.

Es. 5: $\mathfrak{so}(n, J) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n) \mid AJ + J\,{}^t\!A = 0 \}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & ⋰ & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Si può osservare che $\mathfrak{so}(n, J)$ è coniugata a $\mathfrak{so}(n)$ tramite J, comunque:

$X \in \mathfrak{so}(n, J) \iff X$ è antisimm. rispetto alla diagonale secondaria $(\diagup)$.

Es. 6: L di dim. 3

1) Se $L = [L, L]$, dim. che L è semplice.

Prendiamo una base qualsiasi (x, y, z) di L, allora $[L, L]$ è lo span di $[x,y], [x,z], [y,z]$, quindi sono lin. indip..

L non è abeliana, sia I ideale $\neq \{0\}$. Supp. $\dim(I) = 1$, allora poss. supporre $I = \mathrm{span}\{x\}$, e allora $[x,y], [x,z] \in I$, per cui sono lin. dip.: assurdo.

Se invece $\dim(I) = 2$: poss. supporre $I = \mathrm{span}\{x, y\}$, e allora $[x,y], [x,z], [y,z] \in I$, quindi sono lin. dipendenti: assurdo.

Quindi $\dim(I) = 3$ e L è semplice.

Oss.: Però esistono algebre di Lie non semplici e non somma diretta di alg. semplici, tali che $L = [L, L]$.

2) Se $[L, L] = 2$ dim. che L è risolubile.

Prendiamo una base (x,y) di $[L,L]$, cioè $\underset{L^{(1)}}{\underset{\shortparallel}{[L,L]}} = \mathrm{Span}\{x,y\}$,

allora $L^{(2)} = \mathrm{Span}\{[x,y]\}$ abeliana,

quindi $L^{(3)} = \{0\}$ e $[L,L]$ è risolubile. D'altronde $\frac{L}{[L,L]}$ è abeliano,

quindi L è risolubile.

3) Esempio di 2): $L = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & & \\ 0 & -a & & 0 \\ \hline & & a & c \\ & 0 & 0 & -a \end{array} \right) \right\}$ (con $\mathrm{char}(k) \neq 2$)

Es. 7: Data L nilpotente e $K \subsetneq L$ sottoalg., dim. $N_L(K) \supsetneq K$.

Consid. $L \supseteq L^1 \supseteq \dots \supseteq L^m = \{0\}$. Abbiamo $L \not\subseteq K$ ma $\{0\} \subseteq K$.

Sia s massimo con $L^s \not\subseteq K$, allora $L^{s+1} \subseteq K$.

$[L, L^s] = L^{s+1} \subseteq K$. Segue:

$[L^s + K, K] = [L^s, K] + [K,K] \subseteq L^{s+1} + K = K$

Cioè $L^s + K \subseteq N_L(K)$ e $L^s + K \supsetneq K$, quindi $N_L(K) \supsetneq K$.

Teoria:

Dim. teorema decomp. di Fitting:

Da dim.: dato $T \in \mathrm{End}(V)$ (di dim. finita), abb. $V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha$.

Prendiamo α autovalore di T (esiste perché $k = \overline{k}$), e

applichiamo il lemma visto a $T - \alpha$. Osserviamo che

$V_\alpha = \ker (T-\alpha)^m$ per m sufficientem. grande.

Per il lemma: $V = V_\alpha \oplus W$

dove W è stabile per $T-\alpha$ (quindi anche per T).

Se $W \neq \{0\}$ procediamo per induzione su $\dim(V)$, ottenendo:

$$V = V_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in k} W_\beta \right)$$

Esercizio: dim. che se $W_\beta \neq \{0\}$ allora $\beta \neq \alpha$ e $W_\beta = V_\beta$.

$\square$

Teorema (decomp. di Jordan - Chevalley): Sia T come prima, allora esistono $T_s, T_n \in End(V)$ tali che:

1) T_n nilpotente, T_s semisemplice (= diagonalizzabile),
2) $T_n + T_s = T$,
3) $T_n T_s = T_s T_n$.

Dimostrazione: Poss. supporre $V \neq \{0\}$, prendiamo α autovalore di T, abbiamo $(T-\alpha)\big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V_\alpha$ è nilpotente.

Per visualizzare le cose, osservo che $(T-\alpha)\big|_{V_\alpha} \in \mathfrak{u}(\dim(V_\alpha))$ rispetto a qualche base.

Segue in una base di V T ha matrice:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_1 \end{matrix} & \\ \hline & \boxed{\begin{matrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_2 \end{matrix}} \end{array} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_\ell & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_\ell \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sono gli autovalori di T.

Poniamo T_s = la matr. diagonale come la diag. di T, $T_n = T - T_s$.

Allora T_s è semisemplice, T_n è nilpotente, T_s e T_n commutano. $\square$

<u>Teorema</u>: Siano T, T_s, T_n come nel teorema. Allora

4) esistono polinomi $p, q \in k[x]$ senza termine noto tali che $T_s = p(T)$, $T_n = q(T)$.

5) T_s, T_n sono univocam. det. da T (basta che soddisfino 1), 2), 3)).

<u>Dim.</u>: 4) Cerchiamo $p \in k[x]$, usiamo il teorema cinese dei resti in $k[x]$, cioè dati $f_1, \dots, f_\ell$ primi fra loro in $k[x]$, abb.:

$$\frac{k[x]}{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_\ell)} \longrightarrow \frac{k[x]}{(f_1)} \oplus \dots \oplus \frac{k[x]}{(f_\ell)}$$

$$f + (f_1 \cdot \ldots \cdot f_\ell) \longmapsto (f + (f_1), \dots, f + (f_\ell))$$

è un isom. lineare. (<u>Esercizio</u>: si può dim. facilmente osservando che è iniettiva e che i due sp. vett. hanno la stessa dim.)

Applichiamolo a $(x-\alpha_1)^{m_1}, \dots, (x-\alpha_\ell)^{m_\ell}$ dove $(T-\alpha_i)^{m_i}=0$ su V_{α_i} (qui $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sono gli autovalori di T, scritti senza ripetizioni). Scelgo $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ nel codominio $\frac{k[x]}{(f_1)} \oplus \dots$, ottengo un polinomio $p \in k[x]$ tale che

$$p(x) \equiv \alpha_i \quad \mathrm{mod}\,(x-\alpha_i)^{m_i}$$

Posso anche aggiungere la condizione $p(x) \equiv 0 \mod x$ (se 0 è fra gli autovalori allora la condiz. c'è già, altrim. posso prendere $f_{\ell+1}(x) = x$ e $\alpha_{\ell+1} = 0$)

Allora

$$p(T)\Big|_{V_{\alpha_i}} = \alpha_i + \underbrace{(T-\alpha_i)^{m_i}}_{\text{è zero su } V_{\alpha_i}} \tilde{p}(T)\Big|_{V_{\alpha_i}}$$

cioè $p(T)\big|_{V_{\alpha_i}} = \alpha_i \cdot Id_{V_{\alpha_i}}$. Vogliamo dim. $p(T) = T_s$, ma non possiamo usare la costruzione di uno specifico T_s usata nella dim. prec..

Sappiamo che T_s e T_n commutano, quindi anche T e T_n commutano.

Sia $v \in V_{\alpha_i}$ abb. $(T-\alpha_i)^m v = 0 \Rightarrow ((T-\alpha_i)-T_n)^m v = 0$ da cui $(T_s - \alpha_i)^m v = 0$ se m è abb. grande, cioè v è autovett. gen. anche per T_s.

Segue: $T_s|_{V_{\alpha_i}} = \alpha_i \cdot Id_{V_{\alpha_i}}$, perché per endom. semisemplici autovett. e autovett. gen. coincidono. Quindi $p(T) = T_s$.

Basta porre $q(x) = x - p(x)$ per avere $q(T) = T_n$.