TOKEN: 154322

Abb. visto l'enunciato:

<u>Teorema</u>: Sia V di dim. finita, $L \left(\subseteq \mathfrak{gl}(V)\right)$ risolubile, $V \neq \{0\}$. Allora esiste $v \in V$ autovettore comune a tutti gli elem. di L.

<u>Dim.</u>: Induzione su $\dim(L)$, caso $\dim(L)=0$ ovvio. Supponiamo $L \neq \{0\}$.

1) Troviamo M come nella dim. del 1° teorema di „punto fisso".

Osserviamo che $[L,L] \neq L$, perché L è risolubile $\neq \{0\}$, quindi $\frac{L}{[L,L]}$ ha dim. >0, ed è abeliana. Segue: ogni sottosp. vett. di $\frac{L}{[L,L]}$ è un ideale. Come per i soliti teoremi di omomorfismo, gli ideali di $\frac{L}{[L,L]}$ corrispondono agli ideali di L che contengono $[L,L]$.

Quindi basta prendere $M=$ sottosp. vett. di codim. 1 in L, contenente $[L,L]$. E vale: M ideale di L. Scegliamo $z_0 \in L \setminus M$, e allora $L = M \oplus k z_0$.

2) Per induzione, in V ci sono autovettori comuni per tutti gli elem. di M, scegliamo $u \in V$ con $u \neq 0$ e $y.u =$ multiplo scalare di u $\forall y \in M$.

Cioè esiste $\lambda : M \to k$ tale che $y.u = \lambda(y).u$ $\forall y \in M$.

Consideriamo:

$$W = \{ w \in V \mid y.w = \lambda(y) w \quad \forall y \in M \}$$

Si verifica facilmente che W è un sottosp. vettoriale, contenente $u \neq 0$.

3) Dimostriamo che $L.W \subseteq W$, cioè che W è un L-sottomodulo.

Sicuramente è un M-sottomodulo, vediamo come agisce z_0 su un $w \in W$.

Sia $y \in M$, abbiamo:

$$y.z_0.w = \underbrace{z_0 y.w}_{\substack{\parallel \\ z_0 \lambda(y) w = \lambda(y) z_0 w}} - [z_0, y].w$$

Da dim.: $[z_0, y]w = 0$. Sappiamo: $[z_0, y] \in M$, e quindi

$$[z_0, y]w = \lambda([z_0, y])w$$

Da dim.: $\lambda([z_0, y]) = 0$, si fa scrivendo λ in termini di una traccia.

Partiamo prendendo $w \in W \setminus \{0\}$ qualsiasi, e considerando

$$w, \; z_0 w, \; z_0^2 w, \; \dots$$

Ad un certo punto ottengo un vettore comb. lin. dei precedenti, poniamo

$W_0 = \{0\}$, $W_1 = \mathrm{Span}\{w\}$, $W_2 = \mathrm{Span}\{w, z_0 w\}$, ..., $W_i = \mathrm{Span}\{w, z_0 w, \dots, z_0^{i-1} w\}$, ...

..., $W_n =$ l'ultimo in cui $w, z_0 w, \dots, z_0^{n-1} w$ sono lin. indipendenti.

Studiamo MW_i e $z_0 W_i$, usando la base $(w, z_0 w, \dots, z_0^{n-1} w)$ di W_n.

Prendiamo $y \in M$:

$$y z_0^i w = \underline{z_0 y} z_0^{i-1} w + \underbrace{[y, z_0]}_{\in M} z_0^{i-1} w \underset{\uparrow}{=} z_0^i y w + \sum_{j<i} a_j z_0^j w =$$

per induzione $MW_{i-1} \subseteq W_{i-1}$

$$= z_0^i \underline{\lambda(y)} w + \sum_{j<i} a_j z_0^j w \qquad (a_j \in k).$$

Ottengo (ricordo: per induzione su i) che $MW_i \subseteq W_i$ e la matrice di y nella base di W_m è:

$$\begin{pmatrix} \lambda(y) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda(y) \end{pmatrix}$$

Segue: $m \cdot \lambda(y) = tr\left(y|_{W_m}\right)$. La stessa cosa si applica a $[z_0, y]$, osservando che W_m è stabile sia per y (appena detto), sia per z_0 (per costruzione). Quindi W_m è stabile anche per $[z_0, y]$, e allora

$$m \cdot \lambda([y, z_0]) = tr\left([y, z_0]|_{W_m}\right) = tr\left([y|_{W_m}, z_0|_{W_m}]\right) \underset{\uparrow}{=} 0$$

la traccia di un commutatore è nulla

Visto che $char(k) = 0$, concludiamo $\lambda([y, z_0]) = 0$, e quindi concludiamo che W è anche stabile per z_0, quindi è un L-sottomodulo.

Visto che $k = \overline{k}$, $z_0|_W : W \to W$ ha un autovettore in W, diciamo v.

Segue: v è autovettore simultaneo per L. $\square$

<u>Corollario</u> (Teorema di Lie): Sia L ($\subseteq \mathfrak{gl}(V)$ di dim. finita) risolubile. Allora c'è una base di V rispetto alla quale $L \subseteq \mathfrak{b}(n)$ (identificando $\mathfrak{gl}(V)$ con $\mathfrak{gl}(n)$).

Dim.: Per il 2° teo. di „punto fisso" possiamo prendere una base $(v_1, \dots, v_n)$ di V tale che ogni matrice $x \in L$ abbia la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1(x) & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right)$$

prendendo v_1 = autovettore simultaneo. Per induzione su $\dim(V)$ ottengo una base in cui ogni $x \in L$ sia in $\mathfrak{b}(n)$.

$\square$

Corollario: Sia L algebra di Lie di dim. finita risolubile. Allora esiste una catena di ideali $\{0\} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_m = L$ con $\dim(L_i) = i$ e L_i ideale di L, $\forall i$.

Dim.: Applichiamo il teorema di Lie a $\underbrace{ad(L)}_{\text{risolubile}} \subseteq \mathfrak{gl}(L)$: segue che esiste una catena di sottospazi come nell'enunciato, tali che L_i è un $ad(L)$-sottomodulo, cioè è un ideale di L.

$\square$

Corollario: Sia L alg. di Lie di dim. finita. L è risolubile se e solo se $[L, L]$ è nilpotente.

Dim.: $\Rightarrow$) Sia $x_1, \dots, x_n$ base di L in cui $ad(L)$ è contenuta in $\mathfrak{b}(n) \subseteq$
$\subseteq \mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(L)$.

Segue: $[ad(L), ad(L)] \subseteq [\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)] = \mathfrak{n}(n)$

cioè $ad([L,L]) \subseteq \mathfrak{n}(n)$. Segue: $ad([L,L])$ nilpotente.

D'altronde $ad([L,L])$ è l'immagine del sottospazio $[L,L]$ tramite ad, che ha nucleo $Z(L)$, e allora

$$ad([L,L]) \cong \frac{[L,L]}{\underbrace{[L,L] \cap Z(L)}_{\text{nucleo di } ad|_{[L,L]}}}$$

Inoltre $[L,L] \cap Z(L)$ è contenuto in $Z([L,L])$, ed è un ideale di $[L,L]$. Segue: $[L,L]$ è nilpotente.

$\Leftarrow$ Supp. $[L,L]$ nilpotente, allora risolubile. Il quoziente $\frac{L}{[L,L]}$ è abeliano, quindi risolubile. Deduciamo L risolubile.

$\square$

Per il criterio di Cartan (di risolubilità):

PARENTESI DI ALGEBRA LINEARE

Sia V sp. vett. di dim. finita su k.

Def: Un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ si dice autovettore generalizzato per un endom. $T \in gl(V)$ se $\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che $(T-\alpha)^m \cdot v = 0$ dove $\alpha \in k$. Fissato α, tutti i v di questo tipo, assieme a 0, formano l'autospazio generalizzato V_α associato ad α.

Se, dato α, nessun vettore v è autov. gen. per α, allora poniamo $V_\alpha = \{0\}$.

<u>Teorema</u> (decomposizione di Fitting): $V = \bigoplus_{\alpha \in k} V_\alpha$.

Per la dim. usiamo:

<u>Lemma</u>: Sia $T \in \mathfrak{gl}(V)$ come prima. Sia $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che

$$\ker(T^m) = \ker(T^{m+1}) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(T^m) = \mathrm{Im}(T^{m+1})$$

(m esiste perché $\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \ker(T^3) \subseteq \dots$

e $\mathrm{Im}(T) \supseteq \mathrm{Im}(T^2) \supseteq \dots$). Allora $V = \mathrm{Im}(T^m) \oplus \ker(T^m)$

e $T|_{\mathrm{Im}(T^m)} : \mathrm{Im}(T^m) \to \mathrm{Im}(T^m)$ è invertibile, e

$$T|_{\ker(T^m)} : \ker(T^m) \to \ker(T^m) \text{ è nilpotente.}$$

<u>Dim.</u>: Dim. che $V = \mathrm{Im}(T^m) + \ker(T^m)$. Sia $v \in V$, troviamo $u \in \mathrm{Im}(T^m)$, $w \in \ker(T^m)$ con $v = u + w$.

A posteriori osserviamo $T^m(u+w) = T^m u + T^m w = T^m u$

e $T^m u = T^m(T^m u')$ per qualche $u' \in V$.

Cioè $T^m v = T^{2m} u'$. D'altronde

$$\mathrm{Im}(T^m) \xrightarrow{T} \mathrm{Im}(T^{m+1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathrm{Im}(T^{2m})$$

e questi sottospazi sono sempre lo stesso, che quindi è T-stabile, e inoltre

$S = T|_{\mathrm{Im}(T^m)}$ è invertibile.

Quindi poniamo $u' = S^{-2m}(T^m v)$, $u = T^m u'$, vale $T^{2m} u' = T^m v$

e abb. $u \in \mathrm{Im}(T^m)$. Infine poniamo $w = v - u$.

Abb. $T^m w = T^m v - T^{2m} u' = 0$, cioè $w \in \ker(T^m)$.

Segue: $V = \mathrm{Im}(T^m) + \ker(T^m)$.

Infine $\ker(T^m) \cap \mathrm{Im}(T^m) = \ker(T^m|_{\mathrm{Im}(T^m)}) = \{0\}$

perché $T|_{\mathrm{Im}(T^m)}$ è invertibile e quindi anche $T^m|_{\mathrm{Im}(T^m)}$.

Cioè $V = \ker(T^m) \oplus \mathrm{Im}(T^m)$.

Infine chiaramente $T|_{\ker(T^m)}$ è nilpotente.

$\square$