TOKEN: 654520

Criteri di nilpotenza (Teo. di Engel), risolubilità (criterio di Cartan) e semisemplicità

In questa parte consid. solo spazi vettoriali di dim. finita

NILPOTENZA

Def: Sia $x \in L$, L algebra di Lie. x si dice ad-nilpotente se $ad(x) \in \mathfrak{gl}(L)$ è un endom. nilpotente.

Es.: 1) $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2)$ abbiamo

$$[e,e]=0$$
$$[e,h]=-2e, \quad [e,[e,h]]=0$$
$$[e,f]=h, \quad [e,[e,[e,f]]]=0$$

Da questo segue che $ad(e)^3 : L \to L$ è l'endomorfismo nullo. Cioè e è ad-nilpotente.

2) Ci sono elem. di $\mathfrak{gl}(n)$ che non sono matrici nilpotenti, ma che sono ad-nilpotenti, ad esempio $1 \in \mathfrak{gl}(1)$, è ad-nilpotente perché $\mathfrak{gl}(1)$ è abeliana.

Invece il viceversa non si può verificare, v. il seguente lemma.

Lemma: Sia $x \in \mathfrak{gl}(V)$ di dim. finita. Se x è nilpotente allora è anche ad-nilpotente.

Dim.: Oss.: $ad(x) : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ $\quad \left(ad(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V)) \right)$.

Consid. $\lambda_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$, $y \longmapsto xy$ e $\rho_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$, $y \longmapsto yx$.

Allora $ad(x) = \lambda_x - \rho_x$. Abbiamo:

$$ad(x)^m = (\lambda_x - \rho_x)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \lambda_x^j \rho_x^{m-j}$$

perché λ_x e ρ_x commutano,
cioè $\lambda_x \circ \rho_x = \rho_x \circ \lambda_x$

D'altronde $\lambda_x^j(y) = x^j y$ e $\rho_x^{m-j}(y) = y x^{m-j}$ quindi se $m \geq 2l$ con $x^l = 0$ allora $ad(x)^m = 0$.

$\square$

Teorema (di Engel): Sia L alg. di Lie di dim. finita. Se $\forall x \in L$: x è ad-nilpotente, allora L è nilpotente.

Per la dimostrazione usiamo:

Teorema („1° teorema di punto fisso"): Sia $V \neq \{0\}$ sp. vettoriale di dim. finita. Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ sottoalgebra di Lie. Supponiamo x nilpotente $\forall x \in L$. Allora esiste $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $x.v = 0$ $\forall x \in L$.

Dim.: Per induzione su $\dim(L)$.

<u>Base</u>: come base dell'induzione considero il caso $\dim(L)=0$.

In questo caso $L=\{0\}\subseteq \mathfrak{gl}(V)$ e il teorema è ovvio.

(<u>Esercizio</u>: dimostrare direttamente il caso $\dim(L)=1$.)

<u>Passo induttivo</u>: sia $L\neq\{0\}$ e sia $M\subseteq L$ sottoalg. di Lie propria massimale.

1) Dimostriamo che M ha codimensione 1 in L ed è un ideale.

Applichiamo l'induzione a M, ma <u>non</u> che agisce su V.

Consid. $y\in M$, e consid.

$$\begin{aligned} L/M &\longrightarrow L/M \\ x+M &\longmapsto [y,x]+M \end{aligned}$$

E' un'applicazione ben definita, perché M è una sottoalgebra, ed è un analogo della rappresentazione aggiunta.

Questo definisce una <u>rappresentazione di M</u>:

$$\begin{aligned} \varphi: M &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L/M) \\ y &\longmapsto \left(\begin{aligned} L/M &\longrightarrow L/M \\ y &\longmapsto [y,x] \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

cioè questo è un omomorfismo di algebre di Lie (la verifica è come per ad).

Con stessa dim. del lemma, abbiamo che $\varphi(M)$ è fatto da elem.

nilpotenti. Grazie al fatto che $L/M \neq \{0\}$, possiamo applicare l'induzione a $\underbrace{\varphi(M)}_{\text{ha dim.} < \dim(L)} \subseteq gl(L/M)$, quindi il teorema vale in questo caso.

Questo ci assicura un vettore $z_0 + M \in L/M$ non nullo (cioè $z_0 \notin M$) tale che $\varphi(y).(z_0+M) = 0 + M \quad \forall y \in M$.

Visto che $\varphi(y).(z_0+M) = [y, z_0] + M$, abbiamo $[y, z_0] \in M \ \forall y \in M$.

Conseguenze: 1) $M \oplus k z_0$ è una sottoalgebra di Lie di L.
Per massimalità di M, otteniamo $M \oplus k z_0 = L$, cioè M ha codim. 1 in L.

2) M è un ideale, perché ogni elem. $x \in L$ si scrive come $y + c z_0$ e allora $\forall w \in M$ abb. $[y + c z_0, w] = [y, w] + c[z_0, w] \in M$.

2) Conclusione della dim. Applichiamo l'induzione a $M \subseteq gl(V)$, ci assicura $\underline{W \neq \{0\}}$ dove

$$W = \{ w \in V \mid \underbrace{M.v = \{0\}}_{\text{cioè tali che } y.v = 0 \ \forall y \in M} \}$$

Dimostriamo che W è un L-sottomodulo: prendiamo $x \in L$, $w \in W$, $y \in M$ e calcoliamo $y\,x\,w$:

$$y.x.w = x.\underbrace{y.w}_{=0} - \underbrace{[x,y]}_{\substack{\in M \text{ perché} \\ M \text{ è un ideale}}}.w = x.0 + 0 = 0$$

Visto che vale questo $\forall y \in M$ abb. $xw \in W$, cioè W è un L-sottomodulo.

In particolare $z_0 W \subseteq W$, e l'endomorfismo $z_0|_W : W \to W$ è nilpotente (perché w lo è).

Segue: $z_0|_W$ ha almeno un autovettore in W di autovalore nullo (non serve qui supporre né $\mathrm{char}(k)=0$ né $\bar{k}=k$). Sia v un tale autovettore, e sia $x \in L$; scriviamo $x = y + cz_0$ con $y \in M$ e $c \in k$, allora

$$x v = y v + c z_0 v = 0 + 0 = 0$$

cioè v è un vettore come quello cercato. $\square$

<u>Corollario</u>: Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ come nel teorema di „punto fisso". Allora c'è una <u>bandiera</u> (completa) di sottospazi, cioè una sequenza

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$$

di sottospazi vettoriali con $\dim(V_i) = i$, e tale che $L . V_i \subseteq V_{i-1}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Equivalentemente, c'è una base di V tale che $L \subseteq \mathfrak{n}(n)$ (identificando $\mathfrak{gl}(V)$ con $\mathfrak{gl}(n)$).

<u>Dim.</u>: Iniziamo prendendo $v_1 \in V$ tale che $L . v_1 = \{0\}$ e $v_1 \neq 0$ come nel teorema. Completiamo v_1 ad una base di V, allora in questa base ogni elem. di L è della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Prendendo per ogni $x \in L$ la sottomatrice $(n-1)\times(n-1)$ in basso a destra, otteniamo un'algebra di Lie $\tilde{L} \subseteq \mathfrak{gl}(n-1)$. Anch'essa soddisfa le ipotesi del teorema, quindi per induzione su n esiste una base in cui $\tilde{L} \subseteq \mathfrak{n}(n-1)$. Allora, riaggiungendo v_1 a questa base, otteniamo $L \subseteq \mathfrak{n}(n)$.

Per ottenere la bandiera come sopra, basta definire

$V_i = \mathrm{Span}\{\text{primi } i \text{ vettori della base}\}$.

$\square$

<u>Dim. Teorema di Engel</u>: Ric.: L è un'alg di Lie qualsiasi, con tutti gli elem. che sono ad-nilpotenti. Usiamo $\mathrm{ad}: L \to \mathfrak{gl}(L)$.

Cioè applichiamo il 1° teorema di "punto fisso" a $\mathrm{ad}(L) \subseteq \mathfrak{gl}(L)$.

Lo facciamo supponendo $L \neq \{0\}$, altrim. $L = \{0\}$ è nilpotente.

Il teorema ci assicura l'esistenza di un vettore non nullo $z \in L$ ucciso da ogni elem. di $\mathrm{ad}(L)$. Cioè $z \in Z(L)$, cioè $Z(L) \neq \{0\}$.

Consideriamo $\dfrac{L}{Z(L)}$: è un'algebra di Lie di dim. $< \dim(L)$ ed è fatta di elem. ad-nilpotenti (verifica: <u>esercizio</u>).

Per induzione su $\dim(L)$ abb. $\frac{L}{Z(L)}$ è nilpotente.

Segue: L è nilpotente. $\square$

Attenzione: d'ora in poi supponiamo $\boxed{\mathrm{char}(k)=0}$ e $\boxed{k=\overline{k}}$.

RISOLUBILITÀ

Vedremo un criterio di risolubilità (crit. di Cartan), per la dim. useremo

Teorema ("di punto fisso n. 2"): Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ con V di dim finita. Supponiamo L risolubile e $V \neq \{0\}$. Allora esiste $v \neq 0$ autovettore di tutti gli elem. di L.