TOKEN: 830591

Esercizi dal foglio n. 2:

Es. 1: Facile, usando $\forall t: \varphi(e^{tX}) \in H \iff e^{t\, d\varphi(X)} \in H \;\; \forall t \in \mathbb{R} \iff$

$d\varphi(X) \in Lie(H)$.

Es. 2: (1) Dim. che $Lie(SO(2,\mathbb{R})) = so(2,\mathbb{R})$ ha dim. 1 su $\mathbb{R}$.

Facile: $so(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$, quindi $\dim(so(2,\mathbb{R})) = 1$,

e segue anche $so(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ come alg. di Lie commutativa su $\mathbb{R}$.

(2) Sia $\varphi: SO(2,\mathbb{R}) \longrightarrow SO(2,\mathbb{R})$ allora φ è univocam. det. da $d\varphi$. (Inoltre identifichiamo $SO(2,\mathbb{R})$ con $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$.)

Sappiamo che $\exp: so(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$ è suriettiva perché $SO(2,\mathbb{R})$ è abeliano. Allora dato $g \in SO(2,\mathbb{R})$ scriviamolo come $e^X = g$ per $X \in so(2,\mathbb{R})$, e abb.:

$$\underline{\underline{\varphi(g)}} = \varphi(e^X) = e^{\underline{\underline{d\varphi(X)}}}$$

quindi φ è univocam. det. da $d\varphi$.

(3) Dedurre una descriz. di tutti gli omom. continui $\varphi: S^1 \to S^1$.

Possibili candidati: $\varphi_m: S^1 \longrightarrow S^1$

$z \longmapsto z^m$ equivalentem. $(\cos(a), \sin(a)) \longmapsto (\cos(ma), \sin(ma))$

con $m \in \mathbb{Z}$.

Dato $\varphi : S^1 \to S^1$ qualsiasi, usiamo:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\varphi"'] & \mathbb{R} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \quad \text{cioè} \quad \begin{tikzcd} SO(2,\mathbb{R}) \arrow[r, "\varphi"] & SO(2,\mathbb{R}) \\ so(2,\mathbb{R}) \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, "\underline{\underline{d\varphi}}"'] & so(2,\mathbb{R}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Abb.: $d\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lineare, quindi è la moltipl. per uno scalare α.

D'altronde $\exp\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$, e

quindi $\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = I_n$, e segue

$$\varphi\left(\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}\right) = I_n$$

Allora
$$\underbrace{\exp\left(d\varphi\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}\right)}_{\substack{\| \\ \exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi\alpha \\ 2\pi\alpha & 0 \end{pmatrix}}} = I_n$$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi\alpha \\ 2\pi\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}$$

Visto che è $= I_n$, α deve essere un intero.

Cioè φ è uguale a φ_α dall'elenco di prima.

(4) Dimostrare che esistono rappresentaz. di $so(2,\mathbb{R})$ che non sono il differenziale di alcuna rappresentaz. di $SO(2,\mathbb{R})$.

Si usa l'esercizio 1 e la parte 3 di questo esercizio.

Partiamo da
$$\psi : so(2,\mathbb{R}) \longrightarrow gl(2,\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto \alpha X \qquad \text{con } \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Supp. per assurdo $\psi = d\mu$ con $\mu: SO(2,\mathbb{R}) \to GL(2,\mathbb{R})$ rappresentaz.. Oss. che $\psi(so(2,\mathbb{R})) = so(2,\mathbb{R})$, e per l'esercizio 1, $\mu(SO(2,\mathbb{R})) \subseteq SO(2,\mathbb{R})$. Cioè chiamando $\varphi: SO(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$, $g \longmapsto \mu(g)$ l'appl. μ con il codominio $SO(2,\mathbb{R})$,

allora $d\varphi: so(2,\mathbb{R}) \longrightarrow so(2,\mathbb{R})$ coincide con ψ.

Visto che $\alpha \notin \mathbb{Z}$, questo contraddice la parte (3) dell'esercizio.

Es. 3: Facile, osservando che $X \in gl(n)$ è in $\mathfrak{p}$ se e solo se

$X \cdot W \subseteq W$ dove $W = \text{Span}\{e_1, .., e_m\}$ $((e_1, .., e_m, .., e_n) =$ base canonica$)$

e stessa cosa per $g \in Gl(n)$.

Quindi $\mathfrak{p}$ è la più grande sottoalg. di Lie per cui W è un $\mathfrak{p}$-sottomodulo, e P è il più grande sgr tale che W è un P-sottomodulo.

Es. 4: Basta prendere $G (\subseteq GL(n))$ finito (cerchiamo una rappr. $\varphi: G \to GL(V)$ con V che abbia un $Lie(G)$-sottomodulo che non è un G-sottomodulo).

Ad es. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = G \subseteq Gl(2)$ e $\varphi: G \to Gl(2)$ l'inclusione, e $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Allora W non è un G-sottomodulo, ma $Lie(G) = \{0\}$ quindi W è un $Lie(G)$-sottomodulo.

Es. 5: Dato $F = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$, dim. che $SL(2,F)$ è connesso.

(Att.: L'esercizio 3 del foglio 3 è sbagliato. L'es. è dim. che se L è nilpotente (di dim. finita) e $V \leq L$ è un sottosp., allora $\dim([L,V]) < \dim(V)$. Forse serve: V ideale, controllare sul sito per la versione corretta.)

Dim. che $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ generano $SL(2,F)$.

Ricordiamo che moltiplicare a destra o sinistra per queste matrici è fare operazioni elementari di riga o colonna (cioè sommare a una riga un multiplo di un altra, o lo stesso con le colonne).

Dim. che facendo tali operazioni, possiamo partire da una matrice qualsiasi $A \in SL(2,F)$ e ottenere I_2. Perché allora:

$$E_1 \cdots E_s \cdot A \cdot E_{s+1} \cdots E_m = I_2$$

(E_i del tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ opp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$)

e da questo segue:

$$A = E_s^{-1} \cdots E_1^{-1} \cdot E_m^{-1} \cdots E_{s+1}^{-1}$$

($E_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ opp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$)

Da questa espressione si può scrivere un cammino continuo $[0,1] \longrightarrow SL(2,F)$ che parte da I_2 e arriva ad A, basta prendere lo stesso prodotto e sostituire ta al parametro a opp. tb al parametro b di ciascuna matrice E_i. Segue: $SL(2)$ è conn. per archi, quindi connesso.

Rimane di partire da A e arrivare a I_2 con op. elementari:

$$A \underset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Es. 6</u>: Sempre su $F = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$. Sia $F[x,y]_d = \{$polinomi omogenei in x, y di grado $= d\}$.

Dato $p \in F[x,y]_d$, facciamo agire $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su p, trasformando in p la x in $\underline{ax+cy}$ e la y in $\underline{bx+dy}$.

(1) Verificare che questo def. una rappr. di $SL(2)$: facile.

(2) Calcoliamo $d\varphi(e)$, $d\varphi(h)$, $d\varphi(f)$ dove $\varphi: SL(2) \to GL(F[x,y]_d)$ è questa rappr. Usiamo l'esponenziale:

$$\exp(e) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(h) = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & \exp(-1) \end{pmatrix}$$

$$\exp(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $\varphi(\exp(te))$ su una base di $F[x,y]_d = V$, ad es. i monomi: $x^a y^b$ con $a+b=d$

$\varphi(\exp(te)) = \varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, applicato a $x^a y^b$ è

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x^a y^b) = x^a (tx+y)^b =$$

$$= x^a \sum_{s=0}^{b} \binom{b}{s} x^s t^s y^{b-s}$$

Ric.: $\varphi(\exp(te)) = \exp(d\varphi(te))$, e $d\varphi(e) = \frac{d}{dt}\left(\exp(d\varphi(te))\right)\Big|_{t=0}$

Segue: $$d\varphi(e).(x^a y^b) = \frac{d}{dt}\left(x^a \sum_{s=0}^{b} \binom{b}{s} x^s t^s y^{b-s}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \binom{b}{1} x^a x^1 y^{b-1} = b\, x^{a+1} y^{b-1}$$

Allo stesso modo $d\varphi(f).(x^a y^b) = a \cdot x^{a-1} y^{b+1}$.

In modo simile $d\varphi(h).(x^a y^b) = (a-b)\, x^a y^b$

Questo descrive $d\varphi(e)$, $d\varphi(h)$, $d\varphi(f)$ sulla base di V fatta da $x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d$:

$$\begin{tikzcd} x^d \arrow[r, bend right, "f"'] & x^{d-1}y \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[r, bend right, "f"'] & \cdots \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[r, bend right, "f"'] & xy^{d-1} \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[r, bend right, "f"'] & y^d \arrow[l, bend right, "e"'] \end{tikzcd}$$

(a meno dei coeff.)

h: sono tutti autovettori, di autovalori

$d \quad d-2 \quad \cdots \quad -d+2 \quad -d$

(3) Dim. che V è irriducibile, come $\mathfrak{sl}(2)$- e come $SL(2)$-modulo.

Sono equivalenti, per l'esercizio precedente. Dimostriamo che è un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile, basta prendere $p \neq 0$, applicare $d\varphi(e)$ abbastanza volte da ottenere un multiplo scalare non nullo di x^d, e poi applicare

$d\varphi(f)$ tante volte per ottenere tutti gli elem. della base.

Es. 7: (1) Se $\varphi(G) \subseteq O(n,\mathbb{R})$ $\quad (\varphi: G \to GL(n,\mathbb{R}))$,

trovare un complem. G-stabile a ogni G-sottomodulo W

basta prendere $W^\perp$.

(2) Dim. che $\mathbb{R}^n$ è completam. riducibile come G-modulo:

basta prendere un sottom. W non nullo di dim. minimale:

è irriducibile: $\mathbb{R}^n = W \oplus \underbrace{W^\perp}_{G\text{-sottomodulo}}$ e per induzione

decompongo $W^\perp$ in somma diretta di irriducibili.

Es. 8: $L = \{A \in gl(2,\mathbb{C}) \mid A + {}^t\bar{A} = 0,\ tr(A) = 0\}$, $G = \{g \in GL(2,\mathbb{C}) \mid g\,{}^t\bar{g} = I_n\}$

$so(3,\mathbb{R})$, $SO(3,\mathbb{R})$.

(1) $so(3,\mathbb{R}) \cong L$, usando le basi

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B \qquad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = C$$

$[A,B] = 2C \qquad [B,C] = 2A, \qquad [C,A] = 2B.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = G$$

$[E,F] = -G, \qquad [G,E] = -F, \qquad [F,G] = -E.$

Un isom. è dato con $\frac{A}{2} \longmapsto E$, $\frac{B}{2} \longmapsto F$, $\frac{C}{2} \longmapsto -G$.