TOKEN: 358124

Ideali e omomorfismi

Proposizione: 1) Se $\varphi: L \to M$ è un omomorfismo di algebre di Lie, $\ker(\varphi)$ è un ideale di L.

2) Dato $I \subseteq L$ ideale di un'algebra di Lie L, allora I è nucleo di un omom. di algebre di Lie, ad es. $I = \ker(\pi)$, dove
$$\pi: L \longrightarrow L/I, \quad x \longmapsto x+I.$$

3) Dato $I \subseteq L$ ideale e $\varphi: L \to M$ omom. di algebre di Lie, $I \subseteq \ker(\varphi) \iff$ esiste $\psi: L/I \to M$ tale che

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\ & L/I \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $\varphi = \psi \circ \pi$.

4) Dati I, J ideali di L algebra di Lie, se $I \subseteq J$ allora J/I è un ideale di L/I e il quoziente

$$\frac{\left(L/I\right)}{\left(J/I\right)}$$ è naturalm. isomorfo a L/J.

Dim.: esercizio.

Algebre di Lie risolubili e nilpotenti

Sia L un'algebra di Lie (su k).

Def.: La <u>serie derivata</u> di L è

$$L^{(0)} = L$$
$$L^{(1)} = [L, L]$$
$$L^{(2)} = [[L,L],[L,L]]$$
$$\vdots$$
$$L^{(m)} = [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] \qquad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

La <u>serie centrale discendente</u> di L è

$$L^{0} = L$$
$$L^{1} = [L, L]$$
$$L^{2} = [L, [L,L]]$$
$$\vdots$$
$$L^{m} = [L, L^{(m-1)}] \qquad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

Oss.: $L^{(m)} \subseteq L^{(m-1)}$ e $L^{m} \subseteq L^{m-1}$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

(facilmente per induzione).

Lemma: 1) $L^{(m)} \subseteq L^m$,
2) $L^{(m)}$ e L^m sono ideali di L. $\Big\}\ \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Dim.: 1) è ovvio

2) a) Serie derivata: per induzione, caso $m=0$ è chiaro.

Passo induttivo: dato $y \in L^{(m)}$ e $x \in L$, abb.

$y = \sum_i [z_i, w_i]$ con $z_i, w_i \in L^{(m-1)}$ $(m \geq 1)$

$$[x, y] = \sum_i [x, [z_i, w_i]] = \sum_i \Big([\underbrace{[x, z_i]}_{\substack{\in L^{(m-1)} \\ \text{per induzione}}}, \underset{\in L^{(m-1)}}{w_i}] + [\underset{\in L^{(m-1)}}{z_i}, \underbrace{[x, w_i]}_{\substack{\in L^{(m-1)} \\ \text{per induzione}}}] \Big)$$

allora $[x,y] \in [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] = L^{(m)}$.

b) se $y \in L^m$ e $x \in L$ allora $[x,y] \in [L, L^m] = L^{m+1} \subseteq L^m$.

□

Oss.: Se $\varphi: L \to M$ è un omom. di algebre di Lie, allora si verifica facilmente che $\varphi(L^{(m)}) \subseteq M^{(m)}$ e $\varphi(L^m) \subseteq M^m$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Def.: Un'alg. di Lie L si dice <u>risolubile</u> se $\exists m \mid L^{(m)} = \{0\}$, e si dice <u>nilpotente</u> se $\exists m \mid L^m = \{0\}$.

Oss.: L commutativa $\Rightarrow$ L nilpotente $\Rightarrow$ L risolubile.

Esempi: 1) $\mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{sl}(2)^1 = \mathfrak{sl}(2)^{(1)}$ (se $\mathrm{char}(k) \neq 2$), e quindi $\mathfrak{sl}(2)$ non è né risolubile né nilpotente, perché allora $\mathfrak{sl}(2)^{(m)} = \mathfrak{sl}(2)^m = \mathfrak{sl}(2)$ $\forall m$.

2) $\mathfrak{n}(n)$ è nilpotente. Verifica: poniamo
$$
\begin{array}{cc}
 & \text{colonna } j \\
e_{ij} = & \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i
\end{array}
$$
(con $j > i$ se voglio $e_{ij} \in \mathfrak{n}(n)$).

Allora:
$$e_{ij} \cdot e_{st} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq s \\ e_{it} & \text{se } j = s \end{cases}$$

Da questo segue:
$$[e_{ij}, e_{st}] = \begin{cases} e_{it} & \text{se } j = s \text{ (perché allora } i<j=s<t) \\ -e_{sj} & \text{se } i = t \text{ (perché allora } s<t=i<j) \end{cases}$$

supponendo $e_{ij}, e_{st} \in \mathfrak{n}(n)$.

Interpretiamo $d = j - i$ come la „distanza" di e_{ij} dalla diagonale principale:
$$\begin{pmatrix} 0 & (d=1) & (d=2) & \cdots \\ & \ddots & (d=1) & (d=2) \\ & & \ddots & (d=1) \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che questa „distanza" per $[e_{ij}, e_{st}]$ è strettam. maggiore di quelle di e_{ij} ed e_{st}.

Data $x \in \mathfrak{n}(n)$ definiamo
$$\mathrm{dist}(x) = \begin{cases} \min\{\#\text{colonna} - \#\text{riga di tutte le entrate} \neq 0\} & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dal nostro conto segue: $\forall x \in \mathfrak{n}(n)$: $dist(x) \geq 1$

$\forall x \in [\mathfrak{n}(n), \mathfrak{n}(n)]$: $dist(x) \geq 2$

$\vdots$

$\forall x \in \mathfrak{n}(n)^m$: $dist(x) \geq m+1$

Segue: $\mathfrak{n}(n)^{n-1} = \{0\}$, perché se $x \in \mathfrak{gl}(n)$ soddisfa $dist(x) \geq n$ allora $x = 0$.

3) $\mathfrak{b}(n)$ è risolubile, ma non nilpotente.

E' risolubile perché $\mathfrak{b}(n)^{(1)} \subseteq \mathfrak{n}(n)$ (era un esercizio dim. che vale l'uguaglianza), per cui:

$$\mathfrak{b}(n)^{(2)} = [\mathfrak{b}(n)^{(1)}, \mathfrak{b}(n)^{(1)}] \subseteq [\mathfrak{n}(n), \mathfrak{n}(n)] = \mathfrak{n}(n)^{(1)} = \mathfrak{n}(n)^1$$

Per induzione si dimostra $\mathfrak{b}(n)^{(m)} \subseteq \mathfrak{n}(n)^{m-1}$ $\forall m \geq 1$.

Invece $\mathfrak{b}(n)$ non è nilpotente perché $[\mathfrak{h}(n), \mathfrak{n}(n)] = \mathfrak{n}(n)$ ($\leftarrow$ esercizio) e da questo segue $\mathfrak{b}(n)^{m} \supseteq \mathfrak{n}(n)$ $\forall m$.

Proposizione: 1) Se L è risolubile, lo sono tutte le sue sottoalgebre, i suoi quozienti, e tutte le immagini tramite omomorfismi.

2) Se I è un ideale risolubile, e il quoz. L/I è risolubile, allora anche L è risolubile.

3) Se I e J sono ideali risolubili di L (qualsiasi), allora $I+J$ è risolubile.

Dim.: 1) Se $K \subseteq L$ è una sottoalgebra, allora $K^{(m)} \subseteq L^{(m)}$ $\forall m \geq 0$, se I è ideale allora $\left(L/I\right)^{(m)} = \pi\left(L^{(m)}\right)$ $\forall m \geq 0$.

2) Supp. L/I risolubile, da questo segue $\exists m \mid \left(L/I\right)^{(m)} = \{0\}$, cioè $L^{(m)} \subseteq I$. Quindi $L^{(m+s)} \subseteq I^{(s)}$ $\forall s \geq 0$, per cui se anche I è risolubile deduciamo che L è risolubile.

3) Usiamo $\dfrac{I+J}{I} \cong \dfrac{J}{I \cap J}$ (cioè l'isomorfismo standard come gruppi additivi è un isomorfismo di algebre di Lie).
Per 1), il quoziente $\dfrac{J}{I \cap J}$ è risolubile, e per 2) segue che $I+J$ è risolubile.

$\square$

Esercizio: La parte 2) della proposizione non è vera con la nilpotenza, ad es. $\mathfrak{b}(n)$ ha un ideale nilpotente, con quoziente nilpotente (verificarlo).

Oss.: La parte 3) della prop. vale anche per la nilpotenza, con dimostraz. diversa.

Corollario: Un'algebra di Lie qualsiasi ha al più un ideale risolubile massimale. Un'algebra di Lie di dimensione finita ha esattamente un ideale risolubile massimale.

Dim.: Da 3) della proposizione segue l'unicità, e in dimensione finita è ovvia l'esistenza. $\square$

Def.: Sia L un'algebra di Lie di dim. finita.

1) L'ideale risolubile massimale di L si dice il radicale di L: $Rad(L)$.

2) Se $Rad(L)=\{0\}$ allora L si dice semisemplice.

Esercizio: Sia L alg. di Lie di dim. finita. Dimostrare che $\frac{L}{Rad(L)}$ è semisemplice.

Proposizione: 1) Se L è un'algebra di Lie nilpotente, sono nilpotenti tutte le sue sottoalgebre, quozienti, immagini tramite omomorfismi.

2) Se I è un ideale contenuto in $Z(L)$ e L/I è nilpotente, allora L è nilpotente.

3) Se L è un'algebra di Lie $\neq \{0\}$ ed è nilpotente, allora $Z(L)\neq\{0\}$.

Dim.: 1) come prima.

2) Sia m intero tale che $\left(\frac{L}{I}\right)^m = \{0+I\}$, segue $L^m \subseteq I$. Allora $L^{m+1} = [L, L^m] \subseteq [L, I] \subseteq [L, Z(L)] = \{0\}$.

3) Sia m minimo tale che $L^m = \{0\}$, cioè $m \geq 1$, e $L^{m-1} \neq \{0\}$.

Allora $[L, L^{m-1}] = L^m = \{0\}$, cioè $L^{m-1} \subseteq Z(L)$.

Segue $Z(L) \neq \{0\}$.

$\square$

<u>Esercizio</u>: Dim. che 3) non vale con L risolubile invece che nilpotente (prendere k di caratt. 0, e $\mathfrak{b}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$).