TOKEN: 373320

Lemma: Sia $H \leq GL(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso, e $g \in GL(n,\mathbb{R})$. Allora

$$\mathrm{Lie}(gHg^{-1}) = Ad(g) \cdot \mathrm{Lie}(H)$$

Dim.: Abbiamo

$$Ad(g)\cdot \mathrm{Lie}(H) = \{ gXg^{-1} \mid X \in \mathrm{Lie}(H)\} =$$

$$= \{ gXg^{-1} \mid e^{tX} \in H \ \forall t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{ Y \mid \underbrace{e^{t g^{-1} Y g} \in H}_{} \ \forall t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lie}(gHg^{-1}).$$

è equivalente a richiedere $g^{-1} e^{tY} g \in H$, cioè $e^{tY} \in gHg^{-1}$

$\square$

Possiamo dimostrare il teorema dell'ultima volta:

Teorema: Sia $G \leq GL(n,\mathbb{R})$ sottogr. chiuso, $H \leq G$ sottogr. chiuso.

1) Se H è normale in G allora $\mathrm{Lie}(H)$ è un ideale di $\mathrm{Lie}(G)$.
2) Se G e H sono connessi e $\mathrm{Lie}(H)$ è un ideale di $\mathrm{Lie}(G)$, allora H è normale in G.

Dim.: 1) Se H è normale in G allora l'ultimo lemma visto assicura che $\mathrm{Lie}(H)$ è un G-sottomodulo per la rappr. $Ad: G \to GL(\mathrm{Lie}(G))$.

Segue che $Lie(H)$ è un $Lie(G)$-sottomodulo per il differenz. di Ad, che è $ad: Lie(G) \to \mathfrak{gl}(Lie(G))$.
Per il penultimo lemma, concludiamo che $Lie(H)$ è un ideale di $Lie(G)$.

2) Se $Lie(H)$ è un ideale di $Lie(G)$, allora è un $Lie(G)$-sottomodulo per ad, quindi è anche un G-sottomodulo per Ad (perché G è connesso).

Dall'ultimo lemma deduciamo: $\forall g \in G$: gHg^{-1} e H hanno la stessa algebra di Lie. Allora coincidono perché sono entrambi connessi.

$\square$

Def.: Sia A un'algebra (non nec. associativa) su un campo qualsiasi k. Cioè A è uno spazio vettoriale su k con un'appl. bilineare $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$.

Una derivazione di A è un'applicazione lineare $\delta: A \to A$ che soddisfa la regola di Leibnitz: $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$.

Teorema: 1) Sia $G \in GL(n, \mathbb{R})$ un sottogr. chiuso, e $g \in G$. Allora $Ad(g): Lie(G) \to Lie(G)$ è un autom. di algebre di Lie.

2) Sia L un'algebra di Lie su un campo k, e $x \in L$. Allora $ad(x): L \to L$ è una derivazione di L come algebra (prodotto nell'algebra = bracket).

Dim.: 1) Basta osservare $g[X,Y]g^{-1} = g(XY-YX)g^{-1} =$

$$= gXg^{-1}gYg^{-1} - gYg^{-1}gXg^{-1} = [gXg^{-1}, gYg^{-1}] \quad \forall X,Y \in Lie(G).$$

2) Calcoliamo

$$ad(x)([y,z]) = [x,[y,z]] = -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] =$$

$$= [y,[x,z]] + [[x,y],z] = [y, ad(x)(z)] + [ad(x)(y), z]$$

Questa è l'identità di Leibniz per l'algebra L con prodotto = bracket.

$\square$

Def.: Sia G un gruppo, e siano V, W due G-moduli (sullo stesso campo).
Un <u>omomorfismo di G-moduli</u> è un'applicazione lineare $f: V \to W$ tale che $f(g.v) = g.f(v)$ $\forall g \in G$ e $\forall v \in V$, $\forall w \in W$.

La stessa def. si dà per L-moduli dove L è un'algebra di Lie.

ALGEBRE DI LIE

D'ora in poi: k = campo qualunque, e tutti gli sp. vettoriali sono definiti su k.

Def.: Sia L algebra di Lie.

1) Il centro di L è $Z(L) = \{ z \in L \mid [x,z]=0 \ \forall x \in L \}$ (cioè $Z(L) = \ker(\mathrm{ad})$).

2) L'algebra derivata di L è

$$[L,L] = \mathrm{Span}\{ [x,y] \mid x,y \in L \}$$

3) Dati due ideali I, J, si definisce

$$[I,J] = \mathrm{Span}\{ [x,y] \mid x \in I,\ y \in J \}$$

Oss.: 1) $Z(L)$ è un ideale di L, infatti dati $x \in L$, $z \in Z(L)$ allora $[z,x] = 0 \in Z(L)$

2) Anche $[L,L]$ è un ideale, perché per def. contiene tutti gli elem. del tipo $[x,y]$ con $x,y \in L$, quindi in particolare tutti gli elem. del tipo $[x,y]$ con $x \in L$, $y \in [L,L]$.

3) Dati due ideali $I, J \subseteq L$, allora

a) $I+J$ è un ideale, infatti

$$[\underset{\in L}{x}, \underset{\in I}{y} + \underset{\in J}{z}] = \underbrace{[x,y]}_{\in I} + \underbrace{[x,z]}_{\in J}$$

b) $[I,J]$ è un ideale, infatti

$$[\underset{\in L}{x}, [\underset{\in I}{y}, \underset{\in J}{z}]] = -[\underset{\in I}{y}, \underbrace{[z,x]}_{\in J}] - [\underset{\in J}{z}, \underset{\in I}{[x,y]}] \in [I,J]$$

Esempi: 1) $Z(\mathfrak{gl}(n)) = k \cdot I_n$ (fare la verifica per esercizio)

2) $[\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)] = \mathfrak{sl}(2)$ se $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

Verifica: usiamo la base (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(si usa talvolta anche la notazione (x, h, y) invece di (e, h, f) per la stessa base). Abb.:

$$[e,f] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h,$$

$$[h,e] = 2e,$$

$$[h,f] = -2f.$$

Quindi se $\mathrm{char}(k) \neq 2$, allora $h, e, f \in [\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)]$, quindi $[\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)] = \mathfrak{sl}(2)$.

3) $[\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)] = \mathfrak{u}(n)$

Verifica:

$\subseteq$)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Segue: se $X, Y \in \mathfrak{b}(n)$ allora $[X,Y] \in \mathfrak{u}(n)$.

$\supseteq$) <u>Esercizio</u>: Scegliere una base (facile) di $\mathfrak{u}(n)$ e scrivere ogni elem. come un bracket di elt di $\mathfrak{b}(n)$.

Def.: Sia L algebra di Lie. Se L non è abeliana e i suoi unici ideali sono $\{0\}$ e L, allora L si dice semplice.

Oss.: In particolare $L=\{0\}$ non è semplice, e L di dim. 1 non è semplice.

Esempio: Se $\mathrm{char}(k)\neq 2$, allora $L=\mathfrak{sl}(2)$ è semplice.

Verifica: intanto $\mathfrak{sl}(2)$ non è abeliana. Sia $I\subseteq L$ un ideale, supp. $I\neq\{0\}$.

Oss.: se $e\in I$ allora $[e,f]=h\in I$, e allora $f=\frac{1}{-2}\cdot[h,f]\in I$;

se $h\in I$ allora $e=\frac{1}{2}[h,e]\in I$,

se $f\in I$, allora $h=[e,f]\in I$.

In tutti i casi: $I=L$.

Sia ora $x=\alpha e+\beta h+\gamma f$ un elem. di $I\setminus\{0\}$. Calcoliamo

$[e,x]=-2\beta e+\gamma h$, $[e,[e,x]]=-2\gamma e$.

$[f,x]=-\alpha h+2\beta f$, $[f,[f,x]]=-2\alpha f$.

Se $\gamma\neq 0$ allora $e\in I$, segue $I=L$.

Se $\alpha\neq 0$ allora $f\in I$, —, —

Se $\gamma=\alpha=0$ allora $\beta\neq 0$, $h\in I$, segue $I=L$.

Def.: Sia I ideale di un'algebra di Lie L, il quoziente

$$L/I = \{ x+I \mid x \in L \}$$

(quoziente come gruppi additivi) ha una struttura naturale di spazio vettoriale:

$$\begin{cases} (x+I)+(y+I) = (x+y)+I & \forall x,y \in L \\ \lambda \cdot (x+I) = \lambda x + I & \forall x \in L,\ \forall \lambda \in k \end{cases}$$

e anche una struttura naturale di algebra di Lie:

$$[x+I, y+I] = [x,y]+I \qquad \forall x,y \in L$$

Esercizio: Dimostrare che queste def. sono ben poste (indipendenti dalla scelta dei rappresentanti) e che definiscono effettivam. uno spazio vettoriale e un'algebra di Lie.

Def.: Sia $V \subseteq L$ un sottosp. vettoriale di un'algebra di Lie L.

Definiamo

1) il normalizzatore di V in L: $N_L(V) = \{ x \in L \mid [x,v] \in V \ \forall v \in V \}$

2) il centralizzatore di V in L: $Z_L(V) = \{ x \in L \mid [x,v]=0 \ \forall v \in V \}$.