TOKEN: 60718

Esercizi dal foglio n.1

Es. 1 (svolgim.) 1) G con top. discreta $\Rightarrow$ $G\times G$ ha top. discreta e allora ogni appl. $G\times G\to G$ o $G\to G$ è continua.

2) Realizzo G come sgr di S_n e S_n come sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$ delle matrici di permutazione.

Es. 2: T è come $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e ha 4 componenti connesse.

Inoltre T è normale in N, e ha indice 2, quindi $N\setminus T$ è la classe laterale $\neq T$, per cui N ha 8 componenti connesse.

Inoltre $T^\circ = N^\circ = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b>0\right\} \cong (\mathbb{R}_{>0},\times)\times(\mathbb{R}_{>0},\times)$

Usando il logaritmo, T° è isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

Oss. che $\frac{N}{T}$ come gruppo è ciclico di ordine 2 $\left(\text{è } \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)$.

N è un prodotto semidiretto di T per un altro sottogruppo W se e solo se N contiene un sgr W di ordine 2 tale che $W\cap T=\{I_n\}$.

Un tale W esiste, basta prendere $W=\left\{I_n, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

Invece per $T\cap SL(2,\mathbb{R})$ e $N\cap SL(2,\mathbb{R})$ non esiste una matrice in $N\setminus T$ che al quadrato faccia I_n, quindi $N\cap SL(2,\mathbb{R})$ non è un prodotto semidiretto di $T\cap SL(2,\mathbb{R})$ con un altro sgr.

Es. 3: Su $\mathbb{C}$, abb. $T = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ha una sola componente connessa, $T = T^\circ$, e N ha 2 comp. connesse, per cui $T = N^\circ$.

Il resto dell'esercizio è come su $\mathbb{R}$.

Es. 4: Basta prendere $G = \{I_2\} \subseteq GL(2,\mathbb{R})$ e

$X = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, e si ha $e^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$

ma $e^{tX} \notin G$ per qualche t, quindi $X \notin Lie(G)$.

Es. 5:

$$e^A = \left(\begin{array}{ccc|cc} e & -2e & e & & \\ 0 & e & 2e & & 0 \\ 0 & 0 & e & & \\ \hline & & & e^{-2} & e^{-2} \\ & 0 & & 0 & e^{-2} \end{array}\right)$$

Motivo per cui e^A si riesce a calcolare facilmente:

$A = S + N$ dove $S = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & -2 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$

$$N = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Qui S è diagonale, N è nilpotente, e S e N commutano, quindi $e^A = e^{S+N} = e^S \cdot e^N$.

Es. 6: Supp. $Lie(G)$ abeliana.

Dato $g \in G$, lo scrivo come $g = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ con $X_i \in Lie(G)$,

Ma le X_i commutano, quindi $g = e^{X_1 + \dots + X_m}$, cioè $g \in \exp(Lie(G))$.

G è abeliano: $g = e^X$, $h = e^Y$, $e^X e^Y = e^{X+Y} = e^{Y+X} =$
$= e^Y \cdot e^X$.

Viceversa, sia G abeliano.

Osserviamo che, dato un intorno U di I_n in G,

$\log(U) \subseteq Span(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ (se U è abb. piccolo perché $\log$ sia definito)

Visto che $\log(U)$ è un intorno di $0 \in Lie(G)$,

segue $Lie(G) \subseteq Span(G)$.

Quindi $[X, Y] = 0$ $\forall X, Y \in Lie(G)$, cioè $Lie(G)$ è abeliana.

Es. 8: Se A è antiHermitiana, iA è Hermitiana.

Rappresentazione aggiunta

Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso, e

$$\Gamma : G \longrightarrow GL(M_n(\mathbb{R}))$$
$$g \longmapsto (A \mapsto gAg^{-1})$$

Si tratta di una rappresentazione continua di G, con cui $M_n(\mathbb{R})$ acquisisce una struttura di G-modulo.

Lemma: $Lie(G)$ è un G-sottomodulo di $M_n(\mathbb{R})$ (per questa rappresentazione).

Dim.: E' ragionevole se pensiamo a $Lie(G)$ come $T_{I_n}(G)$.

Verifichiamolo con la def. di $Lie(G)$: siano $g \in G$ e $X \in Lie(G)$,

calcoliamo
$$e^{t(gXg^{-1})} = g \underbrace{e^{tX}}_{\in G} g^{-1} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi $gXg^{-1} \in Lie(G)$.

$\square$

Def.: La rappresentazione
$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(Lie(G)) \\ g &\longmapsto (X \mapsto gXg^{-1}) \end{aligned}$$
si dice rappresentazione aggiunta di G. Il suo differenziale
$$ad : Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(Lie(G))$$
si chiama rappresentazione aggiunta di $Lie(G)$.

Oss.: Data $\varphi : G \to GL(V)$ una rappr. continua, consid. $W \subseteq V$ un G-sottomodulo, possiamo consid. $\tilde{\varphi} : G \to GL(W)$ la rappr. „indotta" su W, cioè $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)\big|_W : W \to W$.

Allo stesso modo $d\varphi : Lie(G) \to gl(V)$ „induce" la rappr.

$\widetilde{d\varphi} : Lie(G) \to gl(W)$ data da $\widetilde{d\varphi}(X) = d\varphi(X)|_W : W \to W$.

E' facile verificare che $d(\tilde{\varphi}) = \widetilde{d\varphi}$.

Quindi ad è „indotta" da $d\Gamma$, passando da $M_n(\mathbb{R})$ al sottomodulo $Lie(G)$.

<u>Lemma:</u> Siano $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ di classe C^∞, allora

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha(t) \cdot \beta(t)\right) = \alpha'(t)\beta(t) + \alpha(t)\beta'(t)$$

<u>Dim.:</u> Esercizio.

<u>Proposizione:</u> Dato G come sopra:

$$ad(X)(Y) = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in Lie(G).$$

<u>Dim.:</u> Calcoliamo $ad(X) = d\Gamma(X)|_{Lie(G)} : Lie(G) \to Lie(G)$.

Allora

$$ad(X)(Y) = d\Gamma(X)(Y)$$

Usiamo:

$$\underline{e^{d\Gamma(X)} \cdot Y = \Gamma(e^X) \cdot Y = e^X Y e^{-X}}$$

Quindi

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{d}{dt}\left(e^{t\,d\Gamma(X)}\right)\Big|_{t=0} \cdot Y \overset{\text{lemma precedente}}{=}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{t\,d\Gamma(X)} \cdot Y\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{tX} \, Y \, e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} \overset{\text{lemma}}{=}$$

sono tutti elem. di $M_n(\mathbb{R})$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0} \cdot Y \cdot \left(e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} + \underline{\left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0}} \, Y \, \frac{d}{dt}\left(e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= X \cdot Y - YX = [X, Y].$$

$\square$

<u>Def.:</u> Sia L algebra di Lie qualsiasi su un campo k.
La <u>rappresentazione aggiunta</u> di L è definita come

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\longrightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ X &\longmapsto \left(Y \mapsto \mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]\right) \end{aligned}$$

<u>Esercizio:</u> Verificare che con questa definizione ad è effettivam. un omomorfismo di algebre di Lie.

<u>Teorema:</u> Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sottogr. chiuso, $H \subseteq G$ un sottogruppo chiuso.

1) Se H è normale in G allora $Lie(H)$ è un ideale di $Lie(G)$.

2) Se G e H sono connessi e $Lie(H)$ è un ideale di $Lie(G)$, allora H è normale in G.

Per la dimostrazione:

<u>Lemma:</u> Sia L alg. di Lie su un campo k, e $I \subseteq L$ un sottosp. vettoriale. Allora:

I è un ideale $\iff$ I è un ad-sottomodulo.

<u>Dim.:</u> Sia $x \in L$, $y \in I$: $\quad [x, y] \in I \iff ad(x)(y) \in I$.

La prima condiz. ($\forall x \in L \ \forall y \in I$) è quella di essere un ideale, la seconda di essere un ad-sottomodulo.

$\square$