TOKEN: 630835

Esempi di rappresentazioni:

1) $GL(n,k) \longrightarrow GL(n,k)$ (k = campo qualsiasi)

$A \longmapsto {}^tA^{-1}$

è un omomorfismo di gruppi $\left({}^t(AB)^{-1} = {}^t(B^{-1}A^{-1}) = {}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1}\right)$

quindi è una rappresentazione di $G = GL(n,k)$.

Questo dota k^n di una struttura „alternativa" di G-modulo:

$$A \underset{\text{nuova struttura}}{*} v = {}^tA^{-1} \underset{\substack{\text{prodotto usuale}\\ \text{matrice} \times \text{vettore}}}{\cdot} v$$

Un altro modo di ottenere facilmente automorfismi $G \to G$ (con qualsiasi $G \subseteq GL(n,k)$) è prendere il coniugio per un elem. fissato.

2) Sia G gruppo qualsiasi e $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ (sp. vett. su k campo qualsiasi) una rappresentazione.

Il duale V^* di V ha una struttura naturale di G-modulo:

dati $f \in V^*$ e $g \in G$ si definisce $g \cdot f \in V^*$ ponendo

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v)$$

Cioè la rappr. sul duale è definita come $\tilde{\varphi}: G \longrightarrow GL(V^*)$

come
$$g \longmapsto \tilde{\varphi}(g): V^* \longrightarrow V^*$$
$$f \longmapsto \underset{v \longmapsto f(g^{-1}\cdot v)}{f(g^{-1} \cdot -)}$$

Per verificare che $\tilde{\varphi}$ è una rappresentazione va verificato che

$$\tilde{\varphi}(gh) = \tilde{\varphi}(g) \circ \tilde{\varphi}(h) \qquad \forall g, h \in G,$$

cioè $\quad (gh)\cdot f = g\cdot(h\cdot f) \qquad \forall g, h \in G \ \forall f \in V^*.$

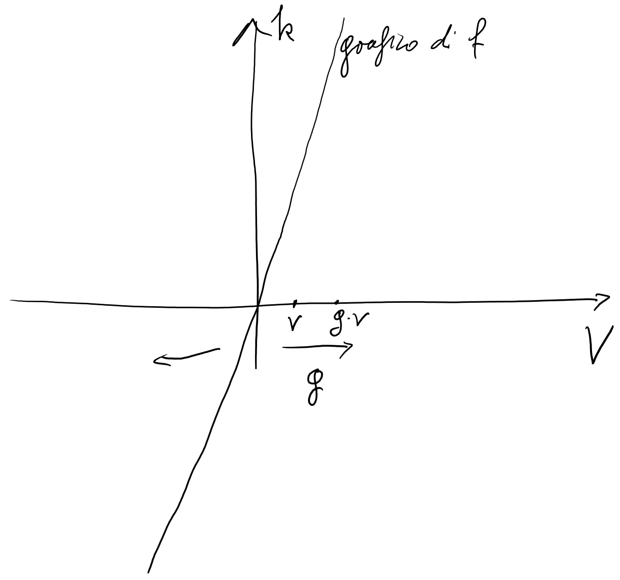
Verifichiamolo su un qualsiasi $v \in V$:

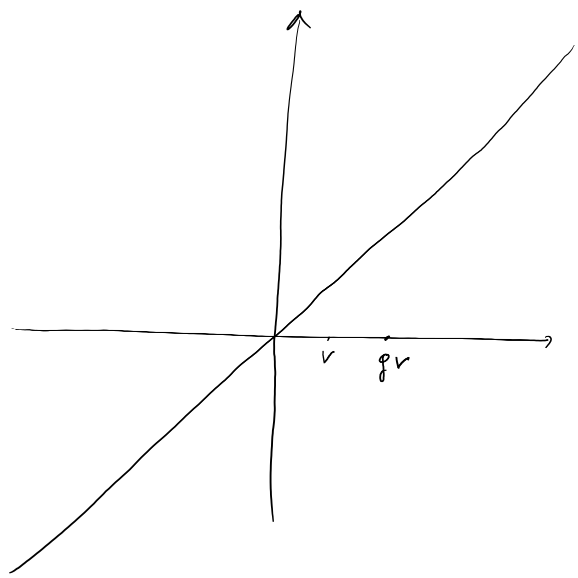
$$\big((gh)\cdot f\big)(v) = f\big((gh)^{-1}\cdot v\big) = f\big(h^{-1}\cdot g^{-1}\cdot v\big)$$

$$\big(g\cdot(h\cdot f)\big)(v) = (h\cdot f)(g^{-1}v) = f\big(h^{-1}\cdot g^{-1}\cdot v\big)$$

quindi $\tilde{\varphi}$ è effettivamente una rappresentazione.

Interpretazione intuitiva della def. di $\tilde{\varphi}$:





interpretiamo un $g \in G$ come una trasformazione $V \longrightarrow V$ e applichiamo la stessa trasformazione al <u>grafico</u> di $f \in V^*$:

la nuova funzione $g\cdot f$ deve valere $f(v)$ nel punto gv,

cioè $\qquad (g\cdot f)(gv) = f(v).$

Questo è equivalente a porre $(g f)(w) = f(g^{-1} w)$.

G-moduli e Lie(G)-moduli

Sia $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un sgr chiuso, e $\varphi : G \to GL(V)$ una rappresentazione continua (V è sp. vett. su $\mathbb{R}$, di dim. finita).

Il suo differenziale $d\varphi : Lie(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ è una rappresentazione di $Lie(G)$.

Oss.: Attenzione: esistono rappresentazioni di $Lie(G)$ che non sono diff. di alcuna rappr. continua di G.

Esempio: Sia $\varphi : G \longrightarrow GL(m, \mathbb{R})$ rappr. continua di $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ sgr chiuso. Sia $V = \mathbb{R}^m$ come G-modulo tramite φ, e consid. $\tilde{\varphi} : G \to GL(V^*)$. Scegliamo su V la base canonica $(e_1, .., e_m)$ e su V^* la base duale $(e_1^*, .., e_m^*)$.

Calcoliamo la matrice di $\tilde{\varphi}(g) : V^* \to V^*$ nella base duale: l'entrata al posto (i,j) è uguale a:

$$\left(\tilde{\varphi}(g)\right)_{i,j} = \underbrace{\left(\tilde{\varphi}(g) \cdot e_j^*\right)}_{\in V^*}(e_i) = e_j^*\left(\varphi(g)^{-1} \cdot e_i\right) = \left(\varphi(g)^{-1}\right)_{j,i}$$

entrata (i,j) della matrice di $\tilde{\varphi}(g)$

entrata della matrice $\varphi(g)^{-1}$ al posto (j,i)

Concludiamo: $\underbrace{\tilde{\varphi}(g)}_{\text{consid. come matrice risp. alla base } (e_1^*, \dots, e_m^*)} = {}^t\varphi(g)^{-1}$

Calcoliamo $d\tilde{\varphi}$: dato $X \in Lie(G)$, abbiamo

$$e^{d\tilde{\varphi}(X)} = \tilde{\varphi}(e^X) = {}^t\varphi(e^X)^{-1} =$$

$$= {}^t\varphi(e^{-X}) = {}^t\left(e^{-d\varphi(X)}\right) = e^{-{}^t d\varphi(X)}$$

Possiamo assumere $\|X\|$ abb. piccola da dedurre $d\tilde{\varphi}(X) = -{}^t d\varphi(X)$, concludiamo che questo vale $\forall X \in Lie(G)$ per linearità di $d\tilde{\varphi}$ e $d\varphi$.

Riscriviamo $d\tilde{\varphi}(X) = -{}^t d\varphi(X)$ in termini delle loro entrate al posto (i,j):

$$(d\tilde{\varphi}(X).e_j^*)(e_i) = \underbrace{d\tilde{\varphi}(X)_{ij}}_{\substack{\text{pensando } d\tilde{\varphi}(X) \\ \text{come matrice, nella} \\ \text{base } (e_1^*, \dots, e_m^*)}} = \left(-{}^t d\varphi(X)\right)_{ij} = e_i^*\left(-{}^t d\varphi(X).e_j\right) =$$

$$= e_j^*\left(-d\varphi(X).e_i\right)$$

Quest'uguaglianza è lineare in e_j^* e in e_i, con il solito procedim. otteniamo

$$\boxed{(d\tilde{\varphi}(X).f)(v) = f(-d\varphi(X).v)} \quad \forall f \in V^* \ \forall v \in V$$

Def.: In generale, sia L un'algebra di Lie qualsiasi su un campo k, e sia V un L-modulo. Definiamo una struttura naturale di L-modulo su V^* ponendo:

$$(x.f)(v) = f(-x.v) \qquad \forall x \in L \quad \forall f \in V^* \quad \forall v \in V.$$

Oss.: La nozione di rappr. di algebra di Lie è equivalente a quella di L-modulo (come per i gruppi), che è data come applicazione

$$\begin{aligned} L \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto x.v \end{aligned}$$

con le condizioni:
1) bilinearità
2) $[x,y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$ $\forall x,y \in L$, $\forall v \in V$.

Esercizio: Verificare che le due nozioni sono effettivam. equivalenti, tramite: data $\varphi: L \to gl(V)$ rappresentaz., definiamo

$$\begin{aligned} L \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto \varphi(x)(v) \end{aligned}$$

Esercizio: Verificare che la def. data su V^* soddisfa effettivam. gli assiomi di L-modulo.

Teorema: Sia $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso, e $\varphi: G \to GL(V)$ rappresentaz. continua (V = sp. vett. su $\mathbb{R}$, di dim. finita).

Consid. $d\varphi: Lie(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ e $W \subseteq V$ un sottosp. vettoriale.

1) Se W è un G-sottomodulo, allora è un $Lie(G)$-sottomodulo.

2) Se G è connesso e W è un $Lie(G)$-sottomodulo, allora W è un G-sottomodulo.

In particolare, se G è connesso, allora:

a) φ è irriducibile $\Longleftrightarrow$ $d\varphi$ è irriducibile,

b) φ è completam. riducibile $\Longleftrightarrow$ $d\varphi$ è completam. riducibile.

Per la dim.:

Lemma: Sia $\alpha: \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ di classe C^∞, e $v \in \mathbb{R}^n$.

Allora
$$\alpha'(t)\cdot v = \frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\cdot v\right).$$

Dim.: Esercizio.

Dim. del teorema: 1) Supponiamo W G-sottomodulo, sia $x \in Lie(G)$ e sia $w \in W$. Abb.:

$$d\varphi(x)\, w = \left(\frac{d}{dt} e^{t\, d\varphi(x)}\right)\Big|_{t=0} \cdot w \overset{\text{per il lemma}}{=}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{t\,d\varphi(X)} \cdot w\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\varphi(\underbrace{e^{tX}}_{\in G}) \cdot w}_{\in W}\right)\Bigg|_{t=0} \boxed{\in W}$$

Quindi W è anche $Lie(G)$-sottomodulo.

2) Supp. G connesso e W un $Lie(G)$-sottomodulo.

Per la teoria vista finora, e visto che G è connesso, dato $g \in G$ esistono $X_1, \dots, X_k \in Lie(G)$ tali che

$$g = e^{X_1} \cdots e^{X_k}$$

Sia $w \in W$, calcoliamo $\varphi(g) \cdot w$:

$$\varphi(g) = \varphi\left(e^{X_1} \cdots e^{X_k}\right) = \varphi(e^{X_1}) \cdots \varphi(e^{X_k}) =$$

$$= e^{d\varphi(X_1)} \cdots e^{d\varphi(X_k)}$$

Allora

$$\varphi(g) \cdot w = e^{d\varphi(X_1)} \cdots \underbrace{e^{d\varphi(X_k)} \cdot w}_{\in W}$$

e per induzione concludiamo che $\varphi(g) \cdot w \in W$, cioè W è un G-sottomodulo.

$\square$

<u>Oss.</u>: Se G non è connesso e W è un $Lie(G)$-sottomodulo, allora possiamo concludere che W è un G^0-sottomodulo (cioè si dice anche che è G^0-stabile), ma non è necessariam. un G-sottomodulo.