Pagina web del corso:

www.mat.uniroma1.it/people/pezzini/didattica/IAlS2122/IstAlSup2122.html

TOKEN: 684091

INTRODUZIONE

Gruppi di Lie: struttura di gruppo + struttura di varietà differenziabile + compatibilità (= moltiplicazione $G \times G \to G$ e inverso $G \to G$ sono C^∞)

Algebre di Lie: spazio vettoriale L con applicaz. bilineare $L \times L \longrightarrow L$ (in generale non associativa) + assiomi.

Esempi di gruppi di Lie: 1) $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo di Lie ($\mathbb{R}$ con struttura usuale di varietà differenz.),

$(\mathbb{R}_{>0}, \times)$, $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}_{\neq 0}, \times)$

prodotto usuale in $\mathbb{R}$

$(S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \times)$

2) (dato $F = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$)

$$GL(n, F), \qquad SL(n, F) = \{A \in GL(n,F) \mid \det(A) = 1\}$$

$$O(n, F) = \{A \in GL(n, F) \mid A \cdot {}^tA = I_n\}$$

matrice identità

($GL(n,F)$ è un aperto di $F^{n^2} = \begin{cases} \mathbb{R}^{n^2} \text{ opp.} \\ \mathbb{C}^{n^2} \end{cases}$

quindi è naturalmente una varietà diff., ed è facile vedere che l'operazione e l'inverso sono C^∞; per gli altri gruppi non è ovvio che siano varietà differenziabili)

$$Sp(n, F) = \{A \in GL(n, F) \mid A \cdot J_n \cdot {}^tA = J_n\},$$ dove n è pari, $n = 2m$

dove $$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & -1 & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ (sulla diag. secondaria abb. 1 m volte e -1 m volte).

<u>Oss.</u>: I gruppi di Lie emergono come esempi importanti di gruppi di matrici (v. sopra), ma anche in altri ambiti, ad es. come gruppi che agiscono tramite diffeomorfismi su varietà differenziabili.

<u>Oss.</u>: Storicamente, le algebre di Lie sono nate come spazi tangenti nell'elem. neutro ai gruppi di Lie. Successivamente sono state applicate anche in altri ambiti, non necessariam. legate ai gruppi di Lie (geom. algebrica / teoria delle deformazioni, teoria dei nodi, fisica matematica...)

Esempio: Consideriamo $G = GL(n, F)$, è un aperto di F^{n^2}.

Lo spazio tangente a G nell'elemento neutro $I_n \in G$ è semplicem.

$$F^{n^2} = \underbrace{M_n(F)}_{} .$$

matrici $n \times n$ a entrate in F

L'"operazione" che consideriamo su questo spazio tangente (rendendolo un'algebra di Lie) è

$$M_n(F) \times M_n(F) \longrightarrow M_n(F)$$
$$(A, B) \longmapsto [A, B] = AB - BA$$

In questo caso non è né associativa né commutativa (se $n \geq 2$).

Vediamo in questo esempio che gruppo $(GL(n, F))$ e algebra (M_n) sono legati da un diffeomorfismo esplicito da un intorno di $0 \in M_n$ in un intorno di $I_n \in GL(n, F)$. Il diffeomorfismo è dato dall' esponenziale di matrici:

$$\exp: U \longrightarrow V$$
$$A \longmapsto e^A$$

(U = un certo intorno di 0 in M_n, V = un certo intorno di I_n in $GL(n)$)

Inoltre il prodotto di matrici in V (se è esso stesso in V) si scrive così:

$$e^A \cdot e^B = e^{\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots\right)}$$

(la somma fra parentesi è in generale una serie, che contiene solo A, B e bracket iterati).

Per noi l'utilità di passare dal gruppo all'algebra sarà soprattutto di passare da domande su una varietà differenziabile (ad es. esistenza di certe sottovarietà) a domande equivalenti su uno spazio vettoriale, su cui useremo l'algebra lineare.

Attenzione: Nel corso non vedremo la teoria generale dei gruppi di Lie, anche perché viene studiata nel corso Geometria Differenziale.

Studieremo solo una classe molto importante di gruppi di Lie: i gruppi di Lie di matrici, cioè sottogruppi/sottovarietà di $GL(n, F)$.

Non tutti i gruppi di Lie sono gruppi di matrici, neppure a meno di isomorfismi (n.b.: definiremo la nozione di isom. più avanti),

ad es.:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(notazione informale)}$$

scritto bene:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

sottosp. affine di dim. 3 in $\mathbb{R}^9$, tutto contenuto in $GL(3, \mathbb{R})$

Questo quoziente è chiaramente un gruppo (sto quozientando per un sgr normale), e si può far vedere che eredita una struttura differenziabile dal gruppo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$ che è diffeomorfo a $\mathbb{R}^3$.