Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Esame scritto

27.6.2022

Esercizio 1. Sia n un intero positivo e sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ tali che le prime $n-1$ colonne sono tutte nulle, ed è nulla anche l'entrata alla riga n, colonna n (l'angolo in basso a destra).

(1) Si dimostri che L è una sottoalgebra di Lie abeliana di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(2) Si dimostri che la mappa esponenziale è una biiezione fra L e la sua immagine $\mathrm{Exp}(L)$, e si trovi un sottogruppo chiuso connesso G di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $L = \mathrm{Lie}(G)$.

(3) Si consideri $V = \mathbb{R}^n$ come G-modulo tramite l'inclusione $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Si trovi un G-sottomodulo $W \subseteq V$ tale che *non esiste* alcun G-sottomodulo $U \subseteq V$ tale che $V = W \oplus U$.

Soluzione esercizio 1. (1) Si verifica immediatamente che $AB = BA = 0$ per ogni $A, B \in L$, e ovviamente allora $[A, B] = 0$. Quindi L è una sottoalgebra di Lie abeliana di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(2) Data $A \in L$, abbiamo $A^2 = 0$ per cui $\mathrm{Exp}(A) = I_n + A$. Segue immediatamente che Exp è una biiezione $L \to \mathrm{Exp}(L)$, di inversa $B \mapsto B - I_n$. Inoltre $G = \mathrm{Exp}(L)$ è l'insieme delle matrici uguali all'identità tranne che per l'ultima colonna, in cui le prime $n-1$ entrate sono a piacere e l'ultima è uguale a 1. Si verifica subito che questo è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, ed è chiuso perché si può descrivere imponendo che l'entrata al posto (i, j) sia uguale a $\delta_{i,j}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e ogni $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, e anche per $i = n, j = n$.

Verifichiamo che $\mathrm{Lie}(G) = L$. Sappiamo che $\mathrm{Exp}(tA) \in G$ per ogni $A \in L$, da cui $L \subseteq \mathrm{Lie}(G)$. Ora confrontiamo le dimensioni di L (come spazio vettoriale) e di G (come varietà differenziabile): sono entrambe uguali a $n-1$, da cui segue $\mathrm{Lie}(G) = L$.

Vediamo una dimostrazione alternativa dell'altra inclusione $\mathrm{Lie}(G) \subseteq L$, senza usare il fatto che G è una varietà differenziabile, e senza usare la sua dimensione. Fissata la base canonica $(e_1, \ldots, e_n)$ di $\mathbb{R}^n$, sappiamo che $\mathbb{R}e_i$ è un G-sottomodulo per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, per cui è anche un $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo. Questo implica che $\mathrm{Lie}(G)$ è contenuta nell'insieme delle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

L'esponenziale di una matrice del genere ha sulla diagonale le entrate $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$. Visto che devono essere tutte uguali a 1, concludiamo che $a_1 = \ldots = a_n = 0$, cioè l'inclusione voluta $\mathrm{Lie}(G) \subseteq L$.

Esercizio 2. Sia $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ somma diretta di algebre di Lie.

(1) Si determini per quali valori di $\eta, \xi \in \mathbb{C}$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L & \to & \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ (\mathsf{x}, \mathsf{y}) & \mapsto & \eta\mathsf{x} + \xi\mathsf{y} \end{array}$$

è un omomorfismo di algebre di Lie.

(2) Sia $\varphi \colon L \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ un omomorfismo di algebre di Lie (non necessariamente della forma data nel punto precedente). Si dimostri che il nucleo di φ contiene la sottoalgebra $\{0\} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ di L oppure la sottoalgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \{0\}$.

(3) Si determini per quali interi positivi n esistono omomorfismi di algebre di Lie iniettivi $L \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Soluzione esercizio 2. (1) Risolvere prima il punto (2) sarebbe utile, perché sapremmo automaticamente che $\eta = 0$ oppure $\xi = 0$. Da qui concluderemmo facilmente che ci sono solo tre possibilità: $\eta = \xi = 0$, oppure $\eta = 1$ e $\xi = 0$, oppure $\eta = 0$ e $\xi = 1$.

Vediamo uno svolgimento alternativo che non richiede il punto (2). Ricordiamo la base $(\mathsf{e},\mathsf{h},\mathsf{f})$ di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Abbiamo:

$$\varphi([(\mathsf{e},\mathsf{e}),(\mathsf{f},\mathsf{f})]) = \varphi([\mathsf{e},\mathsf{f}],[\mathsf{e},\mathsf{f}]) = \varphi(\mathsf{h},\mathsf{h}) = (\eta+\xi)\mathsf{h}$$

e anche

$$\varphi([(\mathsf{e},\mathsf{e}),(\mathsf{f},\mathsf{f})]) = [\varphi(\mathsf{e},\mathsf{e}),\varphi(\mathsf{f},\mathsf{f})] = [(\eta+\xi)\mathsf{e},(\eta+\xi)\mathsf{f}] = (\eta+\xi)^2\mathsf{h}$$

Concludiamo $(\eta+\xi)^2 = \eta+\xi$. Osserviamo che abbiamo usato soltanto l'uguaglianza $[\mathsf{e},\mathsf{f}] = \mathsf{h}$. Con conti simili usando ad es. l'uguaglianza $[\mathsf{h},\mathsf{e}] = 2\mathsf{e}$ potremmo ottenere altre condizioni su η e ξ, con la speranza di restringere molto le possibilità per η e ξ. Vi invito a provare!

È possibile però anche estrarre altre informazioni dalla formula già usata $[\mathsf{e},\mathsf{f}] = \mathsf{h}$. È un metodo istruttivo quindi vediamo i dettagli.

Siano $x,y,z,t \in \mathbb{C}$ e usiamoli per riscalare le matrici che abbiamo usato. Cioè, analogamente a prima, facciamo:

$$\varphi([(x\mathsf{e},y\mathsf{e}),(z\mathsf{f},t\mathsf{f})]) = \varphi([x\mathsf{e},z\mathsf{f}],[y\mathsf{e},t\mathsf{f}]) = \varphi(xz\mathsf{h},yt\mathsf{h}) = (xz\eta+yt\xi)\mathsf{h}$$

e

$$\varphi([(x\mathsf{e},y\mathsf{e}),(z\mathsf{f},t\mathsf{f})]) = [\varphi(x\mathsf{e},y\mathsf{e}),\varphi(z\mathsf{f},t\mathsf{f})] = [(x\eta+y\xi)\mathsf{e},(z\eta+t\xi)\mathsf{f}] = (x\eta+y\xi)(z\eta+t\xi)\mathsf{h}$$

da cui otteniamo

$$xz\eta + yt\xi = xz\eta^2 + xt\eta\xi + yz\xi\eta + yt\xi^2$$

cioè

$$xz(\eta-\eta^2) + yt(\xi-\xi^2) - xt\eta\xi - yz\xi\eta = 0$$

che vale per ogni $x,y,z,t \in \mathbb{C}$. Possiamo vedere l'espressione ottenuta come un polinomio nelle variabili x,y,z,t, che dev'essere il polinomio nullo visto che deve fare sempre 0 se sostituiamo alle variabili valori qualsiasi. I coefficienti pertanto devono essere nulli, cioè

$$\eta = \eta^2, \qquad \xi = \xi^2, \qquad \eta\xi = 0.$$

Dall'ultima uguaglianza otteniamo $\eta = 0$ oppure $\xi = 0$. Notiamo anche che $\eta = \eta^2$, cioè $(\eta-1)\eta = 0$, è verificata solo se $\eta = 0$ oppure $\eta = 1$, e similmente l'uguaglianza $\xi = \xi^2$.

Concludendo: se $\eta = \xi = 0$ abbiamo ovviamente un omomorfismo di algebre di Lie. Se uno dei due è non nullo, allora dev'essere uguale a 1, e l'altro deve essere nullo. Quindi le altre possibilità sono solo $\eta = 1$ e $\xi = 0$, oppure $\eta = 0$ e $\xi = 1$, e in entrambi i casi si vede facilmente che abbiamo effettivamente omomorfismi di algebre di Lie.

(2) Considerato che L ha dimensione 6 e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ha dimensione 3, l'omomorfismo φ non può essere iniettivo. Quindi il suo nucleo è un ideale di L di dimensione positiva. Sappiamo che un'algebra di Lie semisemplice è somma diretta di algebre di Lie semplici, e gli ideali sono le somme di alcuni di queste algebre di Lie semplici. Quindi gli ideali di L sono $0 \oplus 0$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \{0\}$, $\{0\} \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Il nucleo di L è fra questi ma non è il primo di essi, quindi contiene sicuramente $\{0\} \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ oppure $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \{0\}$.

(3) Osserviamo che L ha dimensione 6, invece $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ ha dimensione n^2-1. Quindi non ci possono essere omomorfismi iniettivi $L \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Se $n \geq 4$ allora è facile costruire un omomorfismo iniettivo come richiesto: basta mandare la coppia $(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in L$ nella matrice a blocchi tutta nulla, tranne che per i primi due blocchi 2×2 sulla diagonale, in cui si mettono x e y rispettivamente.

Rimane il problema di determinare se esiste un omomorfismo iniettivo $\varphi\colon L \to \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, e questa parte è molto più difficile del resto del compito. *Per questo motivo l'ho data all'esame ma nella correzione dello scritto ho considerato questa parte solo come un bonus per eventuali punti in più.*

Iniziamo ricordando che la decomposizione astratta di Jordan-Chevalley nelle algebre di Lie semisemplici è compatibile con le rappresentazioni. Questo dice che se $\mathsf{x} \in L$ è un elemento semisemplice (per definizione, questo è equivalente ad essere ad-semisemplice), allora $\varphi(\mathsf{x})$ è un elemento semisemplice di $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Di nuovo, questo è equivalente ad essere un elemento ad-semisemplice di $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Ora, sappiamo che L contiene una sottoalgebra torale di dimensione 2, cioè la somma $H = (\mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) \oplus (\mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$. Allora $\varphi(H)$ è una sottoalgebra (abeliana) torale di dimensione 2 di $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Cioè a meno di cambiare base di $\mathbb{C}^3$, l'immagine $\varphi(H)$ è contenuta nelle matrici diagonali. D'altronde sappiamo che $\mathfrak{h}(3) \cap \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ha dimensione 2, per cui $\varphi(H) = \mathfrak{h}(3) \cap \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

In altre parole $\varphi(L)$ è una sottoalgebra di Lie di $M = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ contenente $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(3) \cap \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Visto che è una sottoalgebra di Lie contenente $\mathfrak{h}$, l'immagine $\varphi(L)$ è stabile per $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$, quindi $\varphi(L)$ è somma di $\mathfrak{h}$ e di alcuni spazi di radici M_α per certe radici α di M. Sia Ψ l'insieme delle radici di M tali che

$$\varphi(L) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} M_\alpha.$$

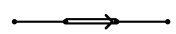
Visto che L ha dimensione 6, l'insieme Ψ ha 4 elementi. Inoltre, sappiamo che Ψ deve essere chiuso rispetto alla somma, cioè se α, β sono in Ψ e se $\alpha + \beta$ è una radice allora $\alpha + \beta$ deve essere in Ψ. Questa è una conseguenza immediata della formula $[M_\alpha, M_\beta] = M_{\alpha+\beta}$, perché se M_α e M_β sono in $\varphi(L)$ allora ci deve stare anche $M_{\alpha+\beta}$.

Osservando il sistema di radici di M, che è fatto dai vertici di un esagono regolare, otteniamo che Ψ deve essere fatto nel modo seguente: deve esserci una radice α e il suo opposto $-\alpha$, poi un'altra radice β che forma un angolo ottuso con α, e la radice $\alpha + \beta$. (Ad esempio, Ψ non potrebbe essere fatto dalle radici α, $-\alpha$, β, $-\beta$ perché $\alpha + \beta$ è una radice e allora deve stare in Ψ.)

Una base di $\varphi(L)$ dunque è $(\mathsf{h}_\alpha, \mathsf{h}_\beta, \mathsf{e}_\alpha, \mathsf{f}_\alpha, \mathsf{e}_\beta, \mathsf{e}_{\alpha+\beta})$. Eseguendo i bracket di questi elementi, vediamo facilmente che la sottoalgebra derivata $[\varphi(L), \varphi(L)]$ di $\varphi(L)$ ha per base $(\mathsf{h}_\alpha, \mathsf{e}_\alpha, \mathsf{f}_\alpha, \mathsf{e}_\beta, \mathsf{e}_{\alpha+\beta})$, quindi $[\varphi(L), \varphi(L)]$ è diversa da $\varphi(L)$. Ma L e la sua immagine omomorfa $\varphi(L)$ sono semisemplici, per cui otteniamo un assurdo.

Quindi non esistono omomorfismi iniettivi $L \to \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo F_4, sia $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}$ una base con le radici semplici numerate nel modo seguente:



1 2 3 4

(1) Si dimostri che $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ è una radice.
(2) Si determini per quali valori di $n, m \in \mathbb{Z}$ l'elemento $n\alpha_2 + m\alpha_3$ è una radice.

Soluzione esercizio 3. (1) Ricordiamo che l'unica entrata della matrice di Cartan fuori dalla diagonale e diversa da 0 e da -1 è $\langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle = -2$. Dimostriamo che $\beta = s_1(s_2(s_3(\alpha_4)))$. Abbiamo

$$s_3(\alpha_4) = \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $\langle \alpha_4, \alpha_3^\vee \rangle = -1$, poi

$$s_2(\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $\langle \alpha_4, \alpha_2^\vee \rangle = 0$ e $\langle \alpha_4, \alpha_3^\vee \rangle = -1$, poi

$$s_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $\langle \alpha_4, \alpha_1^\vee \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 0$ e $\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -1$. Dato ogni elemento del gruppo di Weyl manda radici in radici, otteniamo che β è una radice.

(2) Qui si può usare l'analisi vista a lezione dei possibili angoli fra radici e i loro rapporti fra le lunghezze. Sappiamo che

$$\frac{\|\alpha_2\|^2}{\|\alpha_3\|^2} = 2$$

e che l'angolo fra α_2 e α_3 è ottuso. Segue che α_2 e α_3 sono radici semplici di un sistema di radici Ψ di tipo B_2 (i vertici di un quadrato e i punti medi dei lati), contenuto nel sottospazio vettoriale E' generato da α_2 e α_3.

Tutte le radici di Ψ si ottengono da α_2 e α_3 applicando ripetutamente le riflessioni s_2 ed s_3, quindi Ψ è contenuto in Φ. Inoltre $\Phi \cap E'$ è un sistema di radici sul piano E', ma nessun sistema di radici nel piano contiene strettamente un sistema di radici di tipo B_2. Quindi $\Phi \cap E' = \Psi$, cioè Ψ è proprio l'insieme delle radici di Φ che sono combinazioni lineari di α_2 e α_3. Segue che le radici volute sono

$$\pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_2 + 2\alpha_3).$$