Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Esame scritto

27.6.2022

Esercizio 1. Sia n un intero maggiore di 1 e sia G il sottogruppo di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ delle matrici tali che ogni riga e ogni colonna contengono ciascuna esattamente un'entrata non nulla.

(1) Dando per buono che G è un sottogruppo chiuso in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, dimostrare che l'algebra di Lie di G è l'insieme $\mathfrak{h}(n)$ delle matrici diagonali $n \times n$.
(2) Determinare l'immagine della mappa esponenziale $\mathrm{Exp}(\mathrm{Lie}(G)) \subset G$, e dimostrare che non genera G come gruppo.

Soluzione esercizio 1. (1) Dimostriamo l'inclusione $\mathrm{Lie}(G) \supseteq \mathfrak{h}(n)$. Osserviamo prima di tutto che G contiene tutte le matrici diagonali invertibili. Siano $A \in \mathfrak{h}(n)$ e $t \in \mathbb{R}$, allora tA e tutte le sue potenze sono matrici diagonali. Segue che $\mathrm{Exp}(tA)$ è una matrice diagonale invertibile, quindi un elemento di G. Concludiamo che $\mathfrak{h}(n)$ è contenuta in $\mathrm{Lie}(G)$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{h}(n)$. Dimostriamo prima di tutto che la componente connessa G° contenente l'identità è l'insieme di tutte le matrici diagonali con entrate positive sulla diagonale. Infatti questo insieme è connesso, essendo omeomorfo al prodotto di n copie dell'intervallo aperto $]0,+\infty[$. Inoltre è chiuso in G, perché può essere descritto come il sottoinsieme delle matrici di G tali che tutte le entrate fuori dalla diagonale sono nulle, e quelle sulla diagonale sono ≥ 0 (allora saranno automaticamente > 0). Infine questo insieme è anche aperto in G, perché può essere anche descritto come il sottoinsieme delle matrici di G tali che tutte le entrate sulla diagonale sono > 0.

D'altronde $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^\circ)$, quindi dimostriamo che $\mathrm{Lie}(G^\circ) \subseteq \mathfrak{h}(n)$. A tal fine, sia $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che l'asse cartesiano $\mathbb{R}e_i$ è un G-sottomodulo di $\mathbb{R}^n$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, quindi dev'essere anche un $\mathrm{Lie}(G^\circ)$-sottomodulo. Ma questo implica che ogni matrice di $\mathrm{Lie}(G^\circ)$ è diagonale, da cui otteniamo l'inclusione voluta.

(2) L'esponenziale di una matrice diagonale $A \in \mathfrak{h}(n)$ è facile da calcolare: è la matrice diagonale che ha entrate $e^{a_1},\dots,e^{a_n}$, dove $a_1,\dots,a_n$ sono le entrate sulla diagonale della matrice A. Segue immediatamente che $\mathrm{Exp}(\mathrm{Lie}(G)) = G^\circ$, che è un sottogruppo proprio di G per cui non genera G.

Esercizio 2. L'algebra di Lie *di Heisenberg* è definita come un'algebra di Lie L di dimensione 3 su $\mathbb{C}$, con base (u,v,w) e bracket determinato dalle formule seguenti: $[u,v] = w$, $[u,w] = 0$, $[v,w] = 0$.

(1) Determinare se L è semisemplice, se è risolubile, se è nilpotente, giustificando ogni volta la risposta.
(2) Sia V un L-modulo irriducibile di dimensione finita. Dimostrare che V ha dimensione 1.
(3) Dimostrare che w agisce su V come l'operatore nullo.

Soluzione esercizio 2. (1) Calcoliamo la serie centrale discendente $L^1 = [L,L]$ è lo spazio vettoriale generato dai bracket degli elementi di L, e per bilinearità L^1 è anche generato come spazio vettoriale dai bracket degli elementi della base data di L. Quindi L^1 è generato da w. Per lo stesso argomento, il secondo termine $L^2 = [L, L^1]$ è generato da $[u,w],[v,w],[w,w]$, che sono tutti nulli. Quindi L è nilpotente, e anche risolubile. Concludiamo anche che non è semisemplice, essendo nilpotente.

Per essere precisi, qui va osservata la cosa seguente: un'algebra risolubile (e anche nilpotente) *potrebbe* essere semisemplice (!), ma l'unico caso in cui questo avviene è se ha dimensione 0. Qui L è risolubile e ha dimensione diversa da 0, quindi non è semisemplice.

(2) Sia V un L-modulo irriducibile di dimensione finita, e sia $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ la rappresentazione. Sappiamo che L è risolubile, quindi $\varphi(L)$ è risolubile. Per il Teorema di Lie, esiste una base di V in cui tutti gli elementi di $\varphi(L)$ sono triangolari superiori. Sia v il primo elemento di una tale base, segue che l'"asse cartesiano" $\mathbb{C}v$ è un L-sottomodulo non nullo di V, da cui $V = \mathbb{C}v$.

(3) Sappiamo che $w \in [L, L]$, da cui segue $\varphi(w) \in [\varphi(L), \varphi(L)]$. Scegliendo una base di V e identificando V con $\mathbb{C}$, abbiamo $\varphi(L) \subseteq \mathfrak{gl}(1)$ e $[\varphi(L), \varphi(L)] \subseteq \mathfrak{sl}(1) = \{0\}$. Da questo segue $\varphi(w) = 0$.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici in uno spazio euclideo E. Data una base Δ di Φ, sia w_0 l'elemento del gruppo di Weyl che manda la camera di Weyl fondamentale C nel suo opposto $-C$.

(1) Si dimostri che $w_0(\Delta) = -\Delta$, dove
$$-\Delta = \{-\alpha \mid \alpha \in \Delta\}.$$

(2) Supponendo che Φ sia irriducibile di tipo B_n oppure C_n dove n è un intero maggiore di 1, si dimostri che
$$w_0(\alpha) = -\alpha$$
per ogni $\alpha \in \Delta$, cioè che $w_0 \colon E \to E$ è la moltiplicazione per -1.

Soluzione esercizio 3. (1) Ricordiamo che C è definita come la camera di Weyl tale che $\Delta = \Delta(\gamma)$ per qualsiasi $\gamma \in C$, e chiaramente $-\Delta = \Delta(\eta)$ per ogni $\eta \in -C$. Osserviamo che $w_0(C) = -C$ implica $w_0(\gamma) \in -C$, e dalla definizione di $\Delta(\gamma)$ segue immediatamente $w_0(\Delta(\gamma)) = \Delta(w_0(\gamma))$. Concludiamo che $w_0(\Delta)$ è la base $\Delta(\eta)$ con $\eta = w_0(\gamma)$, cioè $w_0(\Delta) = -\Delta$.

(2) Dal punto precedente concludiamo che $w_0(\alpha)$ è l'opposto di una radice semplice, per ogni α radice semplice. Non è detto a priori però che $w_0(\alpha) = -\alpha$: questo è proprio quello che vogliamo dimostrare nel nostro caso, cioè in tipo B_n oppure C_n.

Partiamo da α_n con la solita numerazione delle radici semplici: si tratta della radice semplice corta in tipo B_n (tutte le altre sono lunghe), e si tratta invece della radice semplice lunga in tipo C_n (tutte le altre sono corte).

Visto che $w_0(\alpha_n)$ ha la stessa lunghezza di α_n, otteniamo che $w_0(\alpha_n)$ è l'unica radice corta opposto di una qualche radice semplice (in tipo B_n) oppure l'unica radice lunga opposto di una qualche radice semplice (in tipo C_n). In entrambi i casi segue $w_0(\alpha_n) = -\alpha_n$.

Ora analizziamo $w_0(\alpha_{n-1})$: è diversa da $-\alpha_n$ (perché w_0 è una biiezione) e si tratta dell'opposto di una radice semplice, non ortogonale a $w_0(\alpha_n)$. L'unica possibilità è che $w_0(\alpha_{n-1})$ sia $-\alpha_{n-1}$. Un ragionamento analogo vale per $w_0(\alpha_{n-2})$, via via fino a $w_0(\alpha_1)$. In conclusione, $w_0(\alpha) = -\alpha$ per ogni $\alpha \in \Delta$.

Visto che Δ è una base di E, abbiamo che w_0 è la moltiplicazione per -1.