Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Esame scritto con soluzioni

10.2.2022

Esercizio 1. Si consideri $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ e la sua rappresentazione usuale su $V = \mathbb{R}^2$ data dall'inclusione $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Si consideri inoltre il G-modulo duale V^*, e si dimostri che V è isomorfo a V^*, cioè che esiste un isomorfismo lineare $V \to V^*$ tale che

$$f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$$

per ogni $v \in V$ e ogni $g \in G$.

Soluzione esercizio 1. Sia $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

e sia (e_1, e_2) la base canonica di $V = \mathbb{R}^2$. Allora

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = ae_1 + ce_2, \qquad Ae_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = be_1 + de_2.$$

Sia ora (η_1, η_2) la base duale. Dato $\eta \in V^*$, ricordiamo che $A \cdot \eta$ è il funzionale $V \to \mathbb{R}$ che manda v in $\eta(A^{-1}v)$. Quindi $A \cdot \eta_1$ è il funzionale che manda v in $\eta_1(A^{-1}v)$.

Ora, la matrice A^{-1} è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

e dato un vettore

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$(A \cdot \eta_1)(v) = \eta_1(A^{-1}v) = \eta_1 \left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \eta_1 \begin{pmatrix} dx - by \\ -cx + ay \end{pmatrix} = dx - by$$

perché, ricordiamo, η_1 "estrae"la prima entrata del vettore che ha come argomento (ed η_2 estrae la seconda). D'altronde

$$\eta_1(v) = x, \qquad \eta_2(v) = y$$

per cui

$$(A \cdot \eta_1)(v) = d\eta_1(v) - b\eta_2(v) = (d\eta_1 - b\eta_2)(v)$$

che vale per ogni v. Deduciamo la seguente uguaglianza fra vettori di V^*.

$$A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2.$$

Con ragionamento analogo, usando η_2 invece che η_1, otteniamo

$$A \cdot \eta_2 = -c\eta_1 + a\eta_2.$$

(Queste formule in realtà sono già state ottenute a lezione, le ho messe per ripasso.)

Dobbiamo ora creare un'applicazione lineare $f\colon V \to V^*$ per cui valga

$$f(Av) = A \cdot f(v)$$

per ogni $v \in V$. Per definire f basta decidere chi sono $f(e_1)$ e $f(e_2)$. Questi ultimi saranno combinazioni lineari di η_1 ed η_2. Dobbiamo scegliere bene queste combinazioni lineari, quindi cerchiamo di confrontare cosa fa A alla base (e_1, e_2) con quello che fa A alla base (η_1, η_2). Le formule sembrano simili, ma in qualche modo i vettori sono "scambiati", e ci sono segni differenti. Non è chiaro ancora come sfruttare questa somiglianza, e come far fronte a queste differenze.

Ad esempio, facciamo il tentativo $f(e_1) = \eta_1$, $f(e_2) = \eta_2$. Allora

$$f(Ae_1) = f(ae_1 + ce_2) = af(e_1) + cf(e_2) = a\eta_1 + c\eta_2,$$

$$f(Ae_2) = f(be_1 + de_2) = bf(e_1) + df(e_2) = b\eta_1 + d\eta_2$$

mentre

$$A \cdot f(e_1) = A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2,$$
$$A \cdot f(e_2) = A \cdot \eta_2 = -c\eta_1 + a\eta_2.$$

Non va bene, qui $A \cdot f(e_1)$ assomiglia di più a $f(Ae_2)$ che a $f(Ae_1)$. Proviamo allora a scambiare gli indici quando definiamo f, cioè poniamo $f(e_1) = \eta_2$ e $f(e_2) = \eta_1$.

In questo caso

$$f(Ae_1) = f(ae_1 + ce_2) = af(e_1) + cf(e_2) = a\eta_2 + c\eta_1,$$
$$f(Ae_2) = f(be_1 + de_2) = bf(e_1) + df(e_2) = b\eta_2 + d\eta_1$$

e

$$A \cdot f(e_1) = A \cdot \eta_2 = -c\eta_1 + a\eta_2,$$
$$A \cdot f(e_2) = A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2,$$

Adesso quasi corrispondono, c'è solo un problema di segni. Proviamo a cambiare un segno definendo f, cioè poniamo $f(e_1) = -\eta_2$ e $f(e_2) = \eta_1$.

Adesso

$$f(Ae_1) = f(ae_1 + ce_2) = af(e_1) + cf(e_2) = -a\eta_2 + c\eta_1,$$
$$f(Ae_2) = f(be_1 + de_2) = bf(e_1) + df(e_2) = -b\eta_2 + d\eta_1$$

e

$$A \cdot f(e_1) = -A \cdot \eta_2 = c\eta_1 - a\eta_2,$$
$$A \cdot f(e_2) = A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2.$$

Qui tutto va come dovrebbe.

La verifica finale, con $v = xe_1 + ye_2$ qualsiasi, segue subito per linearià:

$$f(Av) = f(xAe_1 + yAe_2) = xf(Ae_1) + yf(Ae_2) = x(A \cdot f(e_1)) + y(A \cdot f(e_2)) =$$
$$= A \cdot (xf(e_1) + yfe_2)).$$

L'ultimo passaggio vale perché $\eta \mapsto A \cdot \eta$ è un'applicazione lineare $V^* \to V^*$. Ora applichiamo il fatto che f è lineare, ottenendo

$$\ldots = A \cdot f(xe_1 + ye_2) = A \cdot f(v).$$

Quindi abbiamo effettivamente creato un omomorfismo di G-moduli $f\colon V \to V^*$. Inoltre f manda una base di V in una base di V^*, quindi è un isomorfismo lineare, e pertanto un isomorfismo di G-moduli.

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie di dimensione finita, e supponiamo che esista un ideale I di L tale che $L = Z(L) \oplus I$ (come spazi vettoriali).

(1) Si dimostri che se $I \neq \{0\}$ allora I non è abeliano.
(2) Si dimostri che se $I \neq \{0\}$ allora I non è nilpotente.
(3) Si costruisca un esempio in cui $I \neq \{0\}$ e $Z(L) \neq \{0\}$, e l'ideale I è risolubile.

Soluzione esercizio 2. (1) Supponiamo per assurdo che I sia abeliano e non nullo. Sia $\mathsf{x} \in I$ qualsiasi, e sia $\mathsf{y} \in L$ qualsiasi. Possiamo scrivere

$$\mathsf{y} = \mathsf{y}_I + \mathsf{y}_Z$$

dove $\mathsf{y}_I \in I$ e $\mathsf{y}_Z \in Z(L)$. Allora

$$[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = [\mathsf{x}, \mathsf{y}_I + \mathsf{y}_Z] = [\mathsf{x}, \mathsf{y}_I] + [\mathsf{x}, \mathsf{y}_Z] = \ldots$$

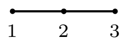
Ma $[\mathsf{x}, \mathsf{y}_I] = 0$ perché I è abeliano, e $[\mathsf{x}, \mathsf{y}_Z] = 0$ perché $\mathsf{y}_Z \in Z(L)$. Quindi le uguaglianze di prima proseguono così:

$$\ldots = 0 + 0 = 0.$$

Segue che x è nel centro $Z(L)$ di L, ma allora $\mathsf{x} = 0$ perchè $I \cap Z(L)\{0\}$. Cioè $I = \{0\}$, assurdo.

(2) Supponiamo I nilpotente e non nullo. Ricordiamo che l'ultimo termine non nullo J della sua serie centrale discendente è abeliano, ed è anche un ideale di L. Vale comunque $J \cap Z(L) = \{0\}$. Si può però applicare a qualsiasi elementi $\mathsf{x} \in J$ il ragionamento del punto precedente, il che implica $\mathsf{x} = 0$. Cioè $J = \{0\}$, assurdo.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo A_3, e si scelga una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ numerata nel modo seguente:



(1) Si trovino tutte le radici positive di Φ.
(2) Si dimostri che $w = s_2 s_3 s_1$ ha lunghezza 3, dove s_i è la riflessione rispetto alla radice α_i.
(3) Si trovi un'espressione ridotta di w diversa da $s_2 s_3 s_1$.

Soluzione esercizio 3. (1) Iniziamo applicando riflessioni semplici alle radici semplici. Chiaramente tralasciamo $s_i(\alpha_i)$, e anche $s_i(\alpha_j)$ se α_i e α_j sono ortogonali. Otteniamo:

$$s_1(\alpha_2) = s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad s_3(\alpha_2) = s_2(\alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Proviamo ad applicare altre riflessioni semplici a queste radici positive non semplici. Di solito ci fanno "tornare indietro", ad esempio $s_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$. L'unico caso in cui non riotteniamo qualcosa di già noto è il seguente:

$$s_3(\alpha_1 + \alpha_2) = s_1(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Si verifica facilmente che questo completa la lista delle radici positive: agendo con riflessioni semplici non riusciamo ad ottenere alcuna altra radice positiva. Per cui

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}.$$

Ricordando che stiamo considerando il sistema di radici di $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, questo corrisponde alle 6 entrate delle matrici sopra la diagonale.

(2) Calcoliamo il numero di radici positive che cambiano segno dopo aver applicato w:

$$\begin{array}{lcl}
w(\alpha_1) & = & s_2(s_3(-\alpha_1)) = s_2(-\alpha_1) = -\alpha_1 - \alpha_2 \\
w(\alpha_2) & = & s_2(s_3(\alpha_1 + \alpha_2))) = s_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
w(\alpha_3) & = & -\alpha_2 - \alpha_3 \\
w(\alpha_1 + \alpha_2) & = & \alpha_3 \\
w(\alpha_2 + \alpha_3) & = & \alpha_1 \\
w(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) & = & -\alpha_2
\end{array}$$

Tre cambiano segno, per cui $\ell(w) = 3$.

(3) Ricordiamo che α_1 ed α_3 sono ortogonali, per cui s_1 ed s_3 commutano. Infatti:

$$s_1(s_3(x)) = s_1(x - \langle x, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3) = x - \langle x, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3 - \langle x, \alpha_1^\vee \rangle \alpha_1 = s_3(s_1(x))$$

per ogni x. Quindi w è anche uguale a $s_2 s_1 s_3$, che è una scrittura ridotta (perché contiene ancora 3 riflessioni semplici) diversa da quella data.