Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Esame scritto con soluzioni

21.1.2022

Esercizio 1. Sia n un intero positivo, e sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso connesso. Supponiamo che esista un intorno $U \subseteq G$ della matrice identità I_n in G, tale che l'insieme

$$\{g - I_n \mid g \in U\}$$

è contenuto nel sottoinsieme $\mathfrak{b}(n) \subseteq M_n$ delle matrici triangolari superiori.

(1) Dimostrare che $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{b}(n)$.
(2) Dimostrare che $G \subseteq B(n)$, dove $B(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ è il sottogruppo delle matrici triangolari superiori invertibili.

Soluzione esercizio 1. (1) A meno di restringere l'intorno U di I_n, possiamo supporre che sia definito il logaritmo $\log|_U : U \to V \subseteq \mathrm{Lie}(G)$ dato dalla serie di potenze vista a lezione, che esso sia una biiezione fra U e la sua immagine $V = \log(U)$ con inversa uguale all'esponenziale $\exp|_V : V \to U$, e che V sia un intorno di 0 in $\mathrm{Lie}(G)$.

Sia ora $\mathsf{x} \in \mathrm{Lie}(G)$, allora esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $t\mathsf{x} \in V$. Facendo l'esponenziale abbiamo $\exp(t\mathsf{x}) \in U$, da cui $\exp(t\mathsf{x}) - I_n \in \mathfrak{b}(n)$. Ricordiamo che $\log(\exp(t\mathsf{x}))$ è una serie di potenze, precisamente si tratta di potenze della matrice $\exp(t\mathsf{x}) - I_n$; visto che $\exp(t\mathsf{x}) - I_n$ è triangolare superiore, ciascuna di queste potenze è triangolare superiore, e lo è anche il limite della serie.

Visto che $t\mathsf{x} = \log(\exp(t\mathsf{x}))$, otteniamo $t\mathsf{x} \in \mathfrak{b}(n)$, e allora anche $\mathsf{x} \in \mathfrak{b}(n)$.

(2) Sappiamo che U genera G, visto che U è un intorno dell'elemento neutro, e G è connesso. Quindi ogni elemento g di G si scrive come prodotto di matrici di U:

$$g = g_1 \cdots g_m.$$

Per ogni i sappiamo che $g_i - I_n$ è triangolare superiore, ma allora lo è anche g_i. Segue che g è invertibile e triangolare superiore, cioè $g \in B(n)$.

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio vettoriale L di $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dimostri che L è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$.
(2) Si stabilisca se L è nilpotente, e se è risolubile.
(3) Si consideri $V = \mathbb{C}^3$ come L-modulo in modo naturale, cioè tramite l'inclusione $L \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$. Si dimostri che V è un L-modulo completamente riducibile, e si calcoli il numero di addendi di una qualsiasi decomposizione di V in somma diretta di L-moduli irriducibili.

Soluzione esercizio 2. (1) Si verificano direttamente i seguenti bracket:

$$[A, B] = -2A, \qquad [A, C] = B, \qquad [B, C] = -2C.$$

Siano ora $\mathsf{x} = aA + bB + cC$ e $\mathsf{y} = a'A + b'B + c'C$ due elementi qualsiasi di L, con $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{C}$. Dalla bilinearità del bracket deduciamo che $[\mathsf{x}, \mathsf{y}]$ è combinazione lineare di $[A, B], [A, C], [B, C]$, che sono tutti elementi di L. Quindi $[\mathsf{x}, \mathsf{y}]$ è un elemento di L. Segue che L è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$.

(2) Dai conti fatti nel punto precedente si vede che gli elementi A, B, C sono essi stessi dei bracket di elementi di L, ad esempio

$$\left[A, -\frac{1}{2}B\right] = A.$$

Da questo otteniamo che $[L, L] = L$, e allora tutti i termini della serie derivata e anche tutti i termini della serie centrale discendente sono uguali a L. Sono anche non nulli, perché $L \neq \{0\}$. Per questo L non è né nilpotente né risolubile.

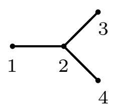
(3) L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ è isomorfa a L, tramite l'applicazione lineare $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to L$ data da $\mathsf{e} \mapsto A$, $\mathsf{h} \mapsto B$, $\mathsf{f} \mapsto C$, dove $(\mathsf{e},\mathsf{h},\mathsf{f})$ è la base usuale di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Infatti i bracket calcolati prima per A, B, C corrispondono a quelli visti tante volte a lezione fra $\mathsf{e},\mathsf{h},\mathsf{f}$, quindi φ è un omomorfismo di algebre di Lie, inoltre φ è suriettiva perché L è generata da A, B, C come spazio vettoriale, ed è iniettiva perché A, B, C sono linearmente indipendenti[1]. Concludiamo che L è semisemplice, e grazie al Teorema di Weyl sappiamo che V è un L-modulo completamente riducibile.

Visto che $L \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, possiamo applicare a L la teoria degli $\mathfrak{sl}(2)$-moduli. Questa ci dice che il numero di addendi di una decomposizione di V in somma diretta di irriducibili è dato da $\dim(V_0) + \dim(V_1)$, dove V_0 e V_1 sono i sottospazi di V dove h agisce per moltiplicazione per uno scalare, rispettivamente $= 0$ e $= 1$. Qui la matrice B corrisponde all'elemento h, quindi basta calcolare le dimensioni dei B-autospazi di V.

Il polinomio caratteristico $\det(B - xI_3)$ di B è uguale a $-x^3 + 4x = -x(x-2)(x+2)$, per cui B ha autovalori $2, 0, -2$. Ciascuno dei corrispondenti autospazi ha dimensione almeno 1, ma V stesso ha dimensione 3, per cui questi autospazi non possono che avere tutti dimensione 1. Quindi V_0

Concludiamo che V ha un solo addendo irriducibile, cioè V stesso è un L-modulo irriducibile.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo D_4, e si scelga una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ numerata nel modo seguente:



(1) Sia $\gamma = l\alpha_1 + m\alpha_3 + n\alpha_4$ con l, m, n interi positivi. Si dimostri che γ non è una radice.
(2) Si dimostri che $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ è una radice.
(3) Si trovi un elemento w del gruppo di Weyl tale che $w(\beta)$ sia nella chiusura della camera fondamentale.

Soluzione esercizio 3. (1) Calcoliamo $s_1(\gamma)$, sfruttando il fatto che α_1 è ortogonale sia ad α_3 sia ad α_4:

$$s_1(\gamma) = l s_1(\alpha_1) + m s_1(\alpha_3) + n s_1(\alpha_4) = -l\alpha_1 + m\alpha_3 + n\alpha_4$$

ma questa non può essere una radice, perché è combinazione lineare di radici semplici con alcuni coefficienti positivi e altri negativi. Per questo γ non può essere una radice.

(2) Cerchiamo di ottenere β da una radice semplice, usando una sequenza di riflessioni semplici. Proviamo a partire da α_1. Ricordiamo che $\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle = -1$, da cui

$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Allo stesso modo, ricordando i valori di $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$ dati dal diagramma di Dynkin, otteniamo

$$s_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

e

$$s_4(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $s_4(\alpha_1) = \alpha_1$, $s_4(\alpha_3) = \alpha_3$, e $s_4(\alpha_2) = \alpha_4 + \alpha_2$. Segue che β è una radice.

(3) Troviamo prima il segno di (β, α_i) per ogni i: se fossero tutti numeri non negativi avremmo che β stessa è nella chiusura della camera fondamentale. Inoltre (β, α_i) ha lo stesso segno di $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle$, che possiamo calcolare direttamente dal diagramma di Dynkin. Abbiamo:

$$\langle \beta, \alpha_1^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_4, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - 1 + 0 + 0 = 1$$

e analogamente

$$\langle \beta, \alpha_3^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha_4^\vee \rangle = 1,$$

[1] Per dimostrare che φ è iniettiva si può persino evitare di verificare l'indipendenza lineare di A, B, C, grazie al ragionamento seguente. Visto che A, B, C sono matrici non tutte nulle, φ non è l'applicazione nulla. Il suo nucleo pertanto è un ideale proprio di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, che però è semplice, quindi il nucleo di φ è uguale a $\{0\}$.

però

$$\langle\beta, \alpha_2^\vee\rangle = \langle\alpha_1, \alpha_2^\vee\rangle + \langle\alpha_2, \alpha_2^\vee\rangle + \langle\alpha_3, \alpha_2^\vee\rangle + \langle\alpha_4, \alpha_2^\vee\rangle = -1 + 2 - 1 - 1 = -1$$

quindi β non è nella chiusura della camera fondamentale.

Cerchiamo allora di cambiare β per spostarla nella camera fondamentale, iniziando con riflessioni semplici. Abbiamo

$$s_1(\beta) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

e

$$\langle\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1^\vee\rangle = -1 + 0 + 0 = -1$$

quindi neppure $s_1(\beta)$ è nella chiusura della camera fondamentale. Analogamente $s_3(\beta)$, $s_4(\beta)$ non sono nella chiusura della camera fondamentale.

Invece

$$s_2(\beta) = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_2) + (\alpha_4 + \alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta'.$$

Abbiamo

$$\langle\beta', \alpha_1^\vee\rangle = \langle\alpha_1, \alpha_1^\vee\rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_1^\vee\rangle + \langle\alpha_3, \alpha_1^\vee\rangle + \langle\alpha_4, \alpha_1^\vee\rangle = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

e analogamente

$$\langle\beta', \alpha_3^\vee\rangle = \langle\beta', \alpha_4^\vee\rangle = 0,$$

e stavolta

$$\langle\beta', \alpha_2^\vee\rangle = \langle\alpha_1, \alpha_2^\vee\rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_2^\vee\rangle + \langle\alpha_3, \alpha_2^\vee\rangle + \langle\alpha_4, \alpha_2^\vee\rangle = -1 + 4 - 1 - 1 = 1$$

quindi β' è nella chiusura della camera fondamentale, e l'elemento w richiesto è $w = s_2$.