Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.8

10.12.2021

Per questi esercizi, siano E uno spazio euclideo con prodotto scalare $(-,-)$, e sia $\Phi \subset E$ un sistema di radici.

Esercizio 1. Si dimostri che per ogni $\alpha \in \Phi$ l'intersezione $(\mathbb{R}\alpha) \cap \Phi$ è uguale a $\{\alpha, -\alpha\}$.

Esercizio 2. Sia α un elemento non nullo di E, e sia $E' \subseteq E$ un sottospazio vettoriale. Si supponga $s_\alpha(E') = E'$, e si dimostri che allora $\alpha \in E'$, oppure tutti i vettori di E' sono ortogonali ad α.

Esercizio 3. Sia E di dimensione 2. Si calcoli l'ordine dell'elemento $s_\alpha s_\beta$ del gruppo di Weyl W di Φ, dove α e β sono due radici che formano un angolo non nullo il più piccolo possibile (fra gli elementi di Φ).

Esercizio 4. Sia $E' \subset E$ un sottospazio vettoriale, e sia $\Phi' = E' \cap \Phi$. Supponiamo che Φ' generi E' come spazio vettoriale. Si dimostri che allora Φ' è un sistema di radici in E'.

Esercizio 5. Fissata $\alpha \in \Phi$, consideriamo

$$\Phi' = \{\beta \in \Phi \mid (\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)\}$$

Sia $E' \subseteq E$ il sottospazio vettoriale generato da Φ'. Si dimostri che Φ' è un sistema di radici in E'.

Esercizio 6.

(1) Sia $L = \mathfrak{sp}(2n)$ e $H = \mathfrak{h}(2n) \cap L$. Si consideri il corrispondente sistema di radici Φ. Si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, 2\varepsilon_n\}$$

è una base di Φ.

(2) Sia $L = \mathfrak{so}(2n+1)$ e $H = \mathfrak{h}(2n+1) \cap L$. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_n\}$$

è una base di Φ.

(3) Sia $L = \mathfrak{so}(2n)$ e $H = \mathfrak{h}(2n) \cap L$. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$$

è una base di Φ.

(Suggerimento: si può applicare direttamente la definizione di base.)

Assumendo che $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ è una base ortonormale di H^* rispetto a un multiplo scalare della forma di Killing, calcolare $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$, per ogni base Δ fra quelle qui sopra.

Esercizio 7. Sia $\sigma \in W$ la riflessione rispetto all'iperpiano $\gamma^\perp$ ortogonale ad un vettore γ non nullo. Si dimostri che esiste $\beta \in \Phi$ tale che $\beta^\perp = \gamma^\perp$.