Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.7

06.12.2021

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Scrivere le radici delle algebre L dell'esercizio 4 del foglio 6, rispetto alla sottoalgebra torale massimale H indicata, in termini delle applicazioni

$$\varepsilon_i\colon \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \mapsto a_i$$

(Suggerimento: per $L = \mathfrak{so}(n)$, conviene distinguere i due casi n dispari ed n pari. Per $L = \mathfrak{so}(n)$ ed $L = \mathfrak{sp}(2n)$, gli H-autospazi di L sono generati da matrici non sempre elementari, ma molto semplici: hanno zeri dappertutto, tranne che in *una o due* entrate.)

Esercizio 2. Sia L semisemplice, e la si scriva come somma diretta di algebre semplici

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$$

Sia H sottoalgebra torale massimale di L. Si dimostri che $H_i = L_i \cap H$ è una sottoalgebra torale massimale di L_i, per ogni i. Se ne deduca che

$$\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$$

dove Φ è l'insieme delle radici di L, e Φ_i è l'insieme delle radici di L_i, per ogni i.

Esercizio 3. Sia L semisemplice e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che $H = N_L(H)$.

Esercizio 4. Sia L semisemplice di dimensione 3. Si dimostri che L è isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Esercizio 5. Si dimostri che non esistono algebre di Lie semisemplici di dimensioni 1, 2, 4, 5, 7.

Esercizio 6. Sia L algebra di Lie semisemplice, e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che

$$\dim(L) \geq 3\dim(H)$$

Per ogni intero positivo n, si trovino L e H tali che $\dim(H) = n$ e $\dim(L) = 3n$.