

Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.5

18.11.2021

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Si consideri la base usuale (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$, e si calcoli la base duale rispetto alla forma di Killing.

Esercizio 2. Si calcoli il determinante della forma di Killing di $\mathfrak{sl}(3)$.

Esercizio 3. Sia L un'algebra di Lie e V un L -modulo. Supponiamo che V sia somma (non necessariamente diretta) di sottomoduli irriducibili

$$V = V_1 + \dots + V_t$$

Si dimostri che V è completamente riducibile.

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie risolubile, e sia V un L -modulo irriducibile. Si dimostri che $\dim(V) = 1$.

Esercizio 5. Sia (e, h, f) la base usuale di $\mathfrak{sl}(2)$, e sia (e', h', f') la base duale rispetto alla forma di Killing. Si calcoli l'elemento

$$\text{ad}(e) \text{ad}(e') + \text{ad}(h) \text{ad}(h') + \text{ad}(f) \text{ad}(f')$$