Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.4

11.11.2021

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k qualsiasi.

Esercizio 1. Questo esercizio è stato assegnato a lezione, durante la dimostrazione della decomposizione di Fitting. Per questo motivo, non si può usare detta decomposizione nello svolgimento. Sia T endomorfismo di uno spazio vettoriale V (di dimensione finita). Siano α e β autovalori distinti di T, e si consideri una decomposizione

$$V = V_\alpha \oplus W$$

dove W è stabile per T, cioè $T(W) \subseteq W$, e V_α è la solita notazione per l'autospazio generalizzato. Si dimostri che $W_\beta = V_\beta$, dove naturalmente

$$W_\beta = \{w \in W \mid \exists m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid (T-\beta)^m w = 0\}$$

Esercizio 2. Siano $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale (di dimensione finita), tali che $[x, y] = 0$. Si dimostri che $(x+y)_s = x_s + y_s$ e $(x+y)_n = x_n + y_n$. Si trovi un esempio in cui queste uguaglianze non sono vere, per due elementi x e y che non commutano.

Esercizio 3. Si calcoli $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\mathsf{x})\,\mathrm{ad}(\mathsf{y}))$ per ogni scelta di x e y nella base solita (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$.

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita. Si dimostri che $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\mathsf{x})\,\mathrm{ad}(\mathsf{y})) = 0$ per ogni $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in L$.

Esercizio 5. Sia L un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita. Si dimostri che $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\mathsf{x})\,\mathrm{ad}(\mathsf{y})) = 0$ per ogni $\mathsf{x} \in [L, L]$ e ogni $\mathsf{y} \in L$.