Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.3

28.10.2021

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k qualsiasi.

Esercizio 1. Si consideri la base[1] (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$ formata dalle matrici

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino le matrici di $\mathrm{ad}(e)$, $\mathrm{ad}(h)$, $\mathrm{ad}(f)$ rispetto a questa base.

Esercizio 2. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2, e $L = \mathfrak{sl}(2)$. Dimostrare che in questo caso $\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{Der}(L)$ è un isomorfismo[2].

Esercizio 3. Sia L un'algebra di Lie di dimensione finita, e sia $I \subseteq L$ un ideale. Si dimostri che se L è nilpotente, allora $\dim([L, I]) < \dim(I)$.

Esercizio 4. Siano $L = \mathfrak{gl}(n)$. Si dimostri che entrambe le sottoalgebre $\mathfrak{b}(n)$ e $\mathfrak{h}(n)$ sono uguali ai loro normalizzatori in L, e che $N_L(\mathfrak{u}(n)) = \mathfrak{b}(n)$.

Esercizio 5. Sia $J \in \mathfrak{gl}(n)$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si denoti $\mathfrak{so}(n, J)$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}(n)$ delle matrici A tali che $A \cdot J + J \cdot {}^tA = 0$. Si dimostri che $\mathfrak{so}(n, J)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$, e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 6. Sia L un'algebra di Lie di dimensione 3.

(1) Si dimostri che, se $L = [L, L]$, allora L è semplice.
(2) Si dimostri che, se $[L, L]$ ha dimensione 2, allora L è risolubile.
(3) Si trovi un esempio di L che soddisfa la condizione del punto 2.

Esercizio 7. Sia L un'algebra di Lie nilpotente, e K una sottoalgebra propria. Si dimostri che $N_L(K)$ contiene K strettamente.

[1] Ricordiamo che è comune anche la notazione x, h, y per gli stessi elementi di $\mathfrak{sl}(2)$.

[2] Ricordiamo che $\mathrm{Der}(L)$ è l'algebra delle derivazioni $L \to L$, dove L è considerata un'algebra non associativa tramite il bracket.