Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.2

21.10.2021

Esercizio 1. Siano $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $H \subseteq \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ due sottogruppi chiusi, e sia $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ una rappresentazione. Dimostrare che

(1) se $\varphi(G) \subseteq H$ allora $d\varphi(\mathrm{Lie}(G)) \subseteq \mathrm{Lie}(H)$, e che
(2) se G è connesso e $d\varphi(\mathrm{Lie}(G)) \subseteq \mathrm{Lie}(H)$ allora $\varphi(G) \subseteq H$.

Esercizio 2. Consideriamo il gruppo topologico S^1, identificato col gruppo $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ delle rotazioni del piano attorno all'origine, e sia $\varphi \colon S^1 \to S^1$ un omomorfismo continuo.

(1) Dimostrare che $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})) = \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ ha dimensione 1 su $\mathbb{R}$.
(2) Dimostrare che φ è univocamente determinato dal suo differenziale $d\varphi \colon \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \to \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.
(3) Dedurre dai punti precedenti una lista completa esplicita di tutti gli omomorfismi continui $S^1 \to S^1$.
(4) Dimostrare che esistono rappresentazioni di $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ che non sono il differenziale di alcuna rappresentazione di $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

Esercizio 3. Come in un esercizio precedente, si consideri l'insieme $\mathfrak{p}$ delle matrici $n \times n$ "a blocchi" della forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove A è una matrice $m \times m$, la matrice B è $m \times (n - m)$, la matrice C è $(n - m) \times (n - m)$, e tutte sono ad entrate in $\mathbb{R}$. Sia infine $P = \mathfrak{p} \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Dimostrare[1] che $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$.

Esercizio 4. Si dia un esempio di un sottogruppo chiuso $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e di una rappresentazione continua $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}(V)$, in modo che V sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, e V ammetta un $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo che non è un G-sottomodulo.

Esercizio 5. Sia $F = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Dimostrare che $\mathrm{SL}(2, F)$ è un gruppo connesso. (*Suggerimento: si può dimostrare che il gruppo è generato dalle matrici triangolari con entrambe le entrate sulla diagonale uguali ad* 1.)

Esercizio 6. Sia $F = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, e si consideri $G = \mathrm{SL}(2, F)$. Sia $F[x, y]$ l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti in F, e $V = F[x]_d$ il sottospazio dei polinomi omogenei di grado d, per un intero d non negativo.

Dato $p \in F[x]$ e $g \in G$, definiamo $g \cdot p$ come il polinomio ottenuto facendo agire g linearmente sulle variabili, cioè la matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

trasforma nel polinomio p la variabile x in $ax + cy$ e trasforma y in $bx + dy$.

(1) Si dimostri che questo definisce una rappresentazione $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}(V)$.
(2) Si calcoli l'immagine tramite il differenziale di φ delle matrici

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che formano una base di $\mathfrak{sl}(2, F)$.
(3) Si dimostri che V è un $\mathfrak{sl}(2, F)$-modulo irriducibile, ed un $\mathrm{SL}(2, F)$-modulo irriducibile.

Esercizio 7. Sia $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ una rappresentazione di un gruppo G. Supponiamo che l'immagine $\varphi(G)$ sia contenuta nel gruppo ortogonale $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

[1] Si tratta di un esercizio simile all'uguaglianza $\mathfrak{b}(n) = \mathrm{Lie}(B(n))$ vista a lezione. Tuttavia, è istruttivo trovare una dimostrazione alternativa che non usi considerazioni riguardo alle dimensioni di P e di $\mathfrak{p}$.

(1) Si dimostri che per ogni G-sottomodulo $W \subseteq V = \mathbb{R}^n$ esiste un G-sottomodulo U tale che
$$V = W \oplus U.$$
(2) Si deduca che V è un G-modulo completamente riducibile.

Esercizio 8. (1) Si consideri[2] l'algebra di Lie L formata dalle matrici antihermitiane 2×2 a entrate in $\mathbb{C}$ e a traccia nulla. Dimostrare che L è isomorfa, come algebra di Lie su $\mathbb{R}$, all'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ (*Suggerimento: si trovino due basi, rispettivamente delle due algebre di Lie, tali che i rispettivi bracket fra gli elementi delle basi si comportino nello stesso modo. Dedurre che le algebre sono isomorfe.*).
(2) Si consideri[3] il gruppo G delle matrici unitarie 2×2 a entrate in $\mathbb{C}$ e a determinante 1. Si dimostri che $\mathrm{Lie}(G) = L$.
(3) Si dimostri che G ha centro non banale, e se ne deduca che non è isomorfo a $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

[2]Di solito si indica questa algebra di Lie come $\mathfrak{su}(2)$.
[3]Di solito si indica questo gruppo come $\mathrm{SU}(2)$.