Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.1

14.10.2021

Esercizio 1. Sia G un gruppo finito, e lo si doti della topologia discreta.

(1) Si dimostri che in questo modo si ottiene un gruppo topologico.
(2) Si dimostri che G è isomorfo (come gruppo topologico) a un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ per qualche $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Esercizio 2. Sia T il sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici invertibili diagonali, e sia N il sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici invertibili che sono diagonali oppure della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dimostri che T ed N sono sottogruppi chiusi di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
(2) Si determinino le componenti connesse di T ed N.
(3) Si considerino le componenti connesse rispettivamente di T ed N che contengono la matrice identità, e si descriva di che gruppi topologici si tratta (ad esempio esibendo isomorfismi con gruppi topologici noti).
(4) Si dimostri che T è un sottogruppo normale di N, e si determini se N è un prodotto semidiretto di T per un altro sottogruppo.
(5) Si svolga il punto precedente con $T \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ e $N \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Esercizio 3. Si svolga l'esercizio precedente con il campo $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si esibisca un esempio di un sottogruppo chiuso $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (per qualche n) e una matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $e^X \in G$ ma $X \notin \mathrm{Lie}(G)$.

Esercizio 5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si calcoli e^A.

Esercizio 6. Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso connesso. Si supponga $\mathrm{Lie}(G)$ abeliana, e si dimostri che

(1) la mappa esponenziale $\exp\colon \mathrm{Lie}(G) \to G$ è suriettiva, e che
(2) anche G è abeliano.

Viceversa, si supponga G abeliano, e si dimostri che allora anche $\mathrm{Lie}(G)$ è abeliana.

Esercizio 7. Siano n, m numeri interi con $1 \leq m < n$, e si consideri l'insieme $\mathfrak{p}$ delle matrici $n \times n$ "a blocchi" della forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove A è una matrice $m \times m$, la matrice B è $m \times (n-m)$, la matrice C è $(n-m) \times (n-m)$, e tutte sono ad entrate in un campo k fissato.

(1) Si dimostri che $\mathfrak{p}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$.
(2) Si consideri il sottoinsieme $\mathfrak{n}$ di $\mathfrak{p}$ formato dalle matrici tali che A e C sono entrambe matrici nulle. Si dimostri che $\mathfrak{n}$ è un ideale di $\mathfrak{p}$.

Esercizio 8. Si consideri $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Data l'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, consideriamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $2n^2$. Con il bracket usuale è ovviamente un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$, oltre che su $\mathbb{C}$. Si consideri ora il sottoinsieme delle matrici $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tali che

$$A + \overline{A}^t = 0$$

cioè l'insieme delle matrici *antihermitiane*. Si dimostri che si tratta di una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Perché non è una sottoalgebra di Lie se invece consideriamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come algebra di Lie su $\mathbb{C}$?