Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Soluzione dell'esercizio 1 del foglio di esercizi n.5

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie e V un L-modulo irriducibile. Si dimostri che ogni elemento di $\mathrm{Rad}(L)$ agisce su V come la moltiplicazione per uno scalare.

Soluzione esercizio 1. Sia $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ la rappresentazione, e osserviamo che $\varphi(\mathrm{Rad}(L))$ è un ideale risolubile di $\varphi(L)$, quindi è contenuto in $\mathrm{Rad}(\varphi(L))$.

Per semplicità, rimpiazziamo ora L con $\varphi(L)$, e dimostriamo semplicemente che $\mathrm{Rad}(L) \subseteq k \cdot \mathrm{Id}_V$, sotto le ipotesi che $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ e V è un L-modulo irriducibile.

Per il teorema di Lie, esiste una base di V rispetto alla quale tutti gli elementi di $\mathrm{Rad}(L)$ agiscono come matrici triangolari superiori.

Denotiamo per brevità $\mathrm{Rad}(L)$ come R. Supponiamo prima di tutto che R non sia abeliano. Allora $[R, R]$ è nilpotente e non banale. Più precisamente, abbiamo visto che $R^1 = [R, R]$ è un ideale di L, visto che R è un ideale di L. Inoltre R^1 è fatto da matrici triangolari superiori con 0 sulla diagonale, nella base considerata prima.

Sia ora W l'intersezione dei nuclei di tutti gli elementi di R^1. Si tratta ovviamente di un sottospazio vettoriale di V, è anche non banale (basta prendere il primo vettore della base di prima). Dimostriamo che W è un L-sottomodulo di V. Siano $x \in L$, $y \in R^1$, $w \in W$, allora

$$yxw = [y, x]w + xyw = 0 + 0 = 0$$

Quindi W è un L-sottomodulo di V, e per l'irriducibilità di V otteniamo che $W = V$, cioè $R^1 = \{0\}$: assurdo.

Rimane da discutere il caso in cui R è abeliano. Sia v_0 un autovettore comune a tutti gli elementi di R, e scriviamo $\alpha\colon \mathrm{Rad}(L) \to k$ l'autovalore, cioè per ogni $y \in R$ abbiamo

$$yv_0 = \alpha(y)v_0$$

Poniamo

$$W' = \{w \in V \mid \forall y \in R\ \exists n \geq 1 | (y - \alpha(y))^n w = 0\}$$

È un sottospazio vettoriale non banale di V, vogliamo dimostrare che si tratta di un L-sottomodulo.

Iniziamo verificando che W' è un R-sottomodulo. Siano $y, z \in R$, $w \in W'$, e n intero positivo tale che $(y - \alpha(y))^n w = 0$; usando il fatto che R è abeliano, abbiamo

$$(y - \alpha(y))^n zw = z(y - \alpha(y))^n w = 0$$

quindi $zw \in W'$, cioè W' è un R-sottomodulo.

Verifichiamo ora che W' è un L-sottomodulo; siano $y \in R$, $x \in L$, $w \in W'$, e n intero positivo tale che $(y - \alpha(y))^n w = 0$. Dimostriamo per induzione su n che $(y - \alpha(y))^{n+1} w = 0$. Il caso $n = 1$ è il seguente: abbiamo $yw = \alpha(y)w$, e vale

$$\begin{gathered}(y - \alpha(y))^2 xw = (y - \alpha(y))(yxw - \alpha(y)xw) = \\ = (y - \alpha(y))([y, x]w + xyw - \alpha(y)xw) = (y - \alpha(y))([y, x]w + \alpha(y)xw - \alpha(y)xw) = \\ = (y - \alpha(y))[y, x]w = [y, x](y - \alpha(y))w = 0\end{gathered}$$

dove la penultima uguaglianza vale perché R è abeliano. Dimostriamo il passo induttivo:

$$\begin{gathered}(y - \alpha(y))^{n+1} xw = (y - \alpha(y))^n (yxw - \alpha(y)xw) = \\ = (y - \alpha(y))^n ([y, x]w + xyw - \alpha(y)xw) = \\ = [y, x](y - \alpha(y))^n w + (y - \alpha(y))^n xyw - (y - \alpha(y))^n x\alpha(y)w = \\ = 0 + (y - \alpha(y))^n x(y - \alpha(y))w = 0\end{gathered}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per l'ipotesi induttiva, infatti $w' = (y - \alpha(y))w$ è un vettore di W' tale che $(y - \alpha(y))^{n-1} w' = 0$. Quindi W' è un L-sottomodulo non banale, cioè $W' = V$.

In altre parole un qualsiasi $y \in R$ agisce su tutto V (nella base di prima) con una matrice triangolare superiore, che sulla diagonale ha lo scalare $\alpha(y)$ ripetuto $\dim(V)$ volte.

A questo punto procediamo come nella dimostrazione del teorema di Lie. Abbiamo

$$\alpha(y) = \frac{\mathrm{Tr}(y)}{\dim(V)}$$

e consideriamo

$$\widetilde{W} = \{w \in V \mid (y - \alpha(y))w = 0 \; \forall y \in R\}$$

Si tratta di un sottospazio vettoriale di V, e contiene almeno il primo vettore della base, quindi è non banale. Dimostriamo che si tratta di un L-sottomodulo. Siano $x \in L$, $y \in R$, $w \in \widetilde{W}$. Abbiamo

$$yxw = [y, x]w + xyw = \alpha([y, x])w + x\alpha(y)w = 0 + \alpha(y)xw$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché $[y, x]$ è un commutatore, per cui ha traccia nulla. Allora $(y - \alpha(y))xw = 0$, cioè $\widetilde{W}$ è un L-sottomodulo non banale di V.

Segue $\widetilde{W} = V$, che è quanto volevamo dimostrare.