

## Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.9

28.11.2019

**Esercizio 1.** Sia  $E = \mathbb{R}^4$  con base canonica  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ . Definiamo  $J = \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$ , e  $\Phi$  come il sottoinsieme degli  $\alpha \in J$  tali che  $(\alpha, \alpha) = 1$  oppure 2. Verificare che

$$\begin{aligned}\Phi = & \{\pm\varepsilon_i \mid i \in \{1, \dots, 4\}\} \cup \\ & \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j \in \{1, \dots, 4\}\} \cup \\ & \{\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}\end{aligned}$$

(dove tutti i segni possono venir scelti in modo indipendente), e che  $\Phi$  è un sistema di radici di tipo  $F_4$ , con base

$$\Delta = \left\{ \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \right\}$$

**Esercizio 2.** Sia  $E = \mathbb{R}^3$  con base canonica  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Sia  $J$  l'insieme degli elementi di  $\mathbb{Z}^3$  ortogonali a  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . Definiamo  $\Phi$  come l'insieme degli elementi  $\alpha \in J$  tali che  $(\alpha, \alpha) = 2$  oppure 6. Verificare che

$$\Phi = \pm\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}$$

e che  $\Phi$  è un sistema di radici di tipo  $G_2$  con base

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$$

**Esercizio 3.** Sia  $W$  il gruppo di Weyl di un sistema di radici, sia  $\Delta$  una base, e sia

$$w = s_1 s_2 \dots s_t$$

una scrittura ridotta di un elemento  $w \in W$  (gli elementi  $s_1, \dots, s_t$  sono riflessioni semplici eventualmente ripetute). Denotiamo con  $\alpha_i$  la radice semplice della riflessione  $s_i$ .

- (1) Si dimostri che  $s_1 s_2 \dots s_i$  è una scrittura ridotta per ogni  $i \in \{1, \dots, t\}$ , e che lo stesso vale per  $s_t s_{t-1} \dots s_i$ .
- (2) Si considerino le radici

$$\begin{aligned}\beta_t &= \alpha_t, \\ \beta_{t-1} &= s_t(\alpha_{t-1}), \\ \beta_{t-2} &= (s_t \circ s_{t-1})(\alpha_{t-2}), \\ &\vdots \\ \beta_1 &= (s_t \circ \dots \circ s_2)(\alpha_1),\end{aligned}$$

e si dimostri che  $\beta_1, \dots, \beta_t$  sono tutte e sole le radici positive che cambiano segno quando si applica  $w$ . (Suggerimento: per dimostrare che sono tutte distinte, si può usare il fatto che  $s_{-\alpha} = s_\alpha$ .)

**Esercizio 4.** Sia  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  base di un sistema di radici  $\Phi$ , e sia  $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ .

- (1) Si dimostri che  $\Delta^\vee$  è una base del sistema di radici  $\Phi^\vee$ .
- (2) Considerando  $\Delta^\vee$  come base dello spazio vettoriale  $E^*$ , si consideri la base duale  $D = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  di  $E$ , cioè la base tale che  $\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle$  è uguale a 0 se  $i \neq j$ , ed è uguale a 1 altrimenti. Si calcolino le coordinate dei vettori di  $\Delta$  rispetto alla base  $D$ .
- (3) Nei quattro casi di  $E = \mathbb{R}^2$ , si calcolino anche le coordinate dei vettori di  $D$  rispetto alla base  $\Delta$ , e si disegnino i vettori di  $D$  sul piano. Per quali di questi diagrammi le coordinate sono tutte intere?

**Esercizio 5.** Siano  $L = \mathfrak{sl}(n+1)$ ,  $H = L \cap \mathfrak{h}(n+1)$ , e  $\Phi$  il corrispondente sistema di radici. Si consideri la base  $\Delta$  vista a lezione del sistema di radici di  $L$ :

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}.$$

- (1) Si calcolino i vettori  $\omega_i$  dell'esercizio precedente, esprimendoli in termini di  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}$ .
- (2) Si trovi una rappresentazione irriducibile di  $L$  tale che  $\mathfrak{b} = L \cap \mathfrak{b}(n+1)$  abbia un autovettore simultaneo, in modo che l'autovalore ristretto ad  $H$  sia  $\omega_1$  (osserviamo che  $\mathfrak{b} \supseteq H$ ). Se ne trovi una tale che questa restrizione sia  $\omega_n$ .
- (3) Se ne trovi una tale che la restrizione sia  $\omega_2$  (*difficile; suggerimento: si usi il prodotto tensoriale*).