Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.8

21.11.2019

Esercizio 1. (1) Sia $L = \mathfrak{sp}(2n)$ e $H = \mathfrak{h}(2n) \cap L$. Si consideri il corrispondente sistema di radici Φ. Si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, 2\varepsilon_n\}$$

è una base di Φ.

(2) Sia $L = \mathfrak{so}(2n + 1)$ e $H = \mathfrak{h}(2n + 1) \cap L$. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_n\}$$

è una base di Φ.

(3) Sia $L = \mathfrak{so}(2n)$ e $H = \mathfrak{h}(2n) \cap L$. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$$

è una base di Φ.

(Suggerimento: si può applicare direttamente la definizione di base.)

Assumendo che un multiplo della forma di Killing si può estendere ad una forma bilineare su $\mathfrak{h}(n)$ tale che $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ è una base ortonormale di $\mathfrak{h}(n)^*$, calcolare $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$, per ogni base Δ fra quelle qui sopra.

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ del duale E^*. Inoltre si consideri E^* come uno spazio euclideo, trasferendo il prodotto scalare da E a E^* come abbiamo fatto trasferendo la forma di Killing da H ad H^*. Si dimostri che $\Phi^\vee$ è un sistema di radici in E^*. Si disegni il sistema di radici nei quattro sistemi di radici visti a lezione in $E = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. Sia $\sigma \in W$ la riflessione rispetto all'iperpiano $\gamma^\perp$ ortogonale ad un vettore γ non nullo. Si dimostri che esiste $\beta \in \Phi$ tale che $\beta^\perp = \gamma^\perp$.

Esercizio 4. (1) Si dimostri che esiste un unico elemento $w_0 \in W$ che manda Φ^+ in Φ^-.

(2) Si dimostri che $w_0^2 = \mathrm{Id}$.

(3) Si dimostri che una qualsiasi espressione ridotta di w_0 deve contenere ogni riflessione semplice almeno una volta.

(4) Sia $w \in W$ un elemento qualsiasi, e si consideri un'espressione ridotta $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{\ell(w)}$ (come al solito, le riflessioni semplici che appaiono possono essere eventualmente ripetute). Si dimostri che esiste un'espressione ridotta di w_0 che comincia con quella di w, cioè un'espressione ridotta di w_0 del tipo

$$w_0 = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{\ell(w)} \cdot s_{\ell(w)+1} \cdots s_{\ell(w_0)}$$

(5) Si calcoli w_0 per i quattro sistemi di radici visti a lezione in $E = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 5. Sia $w \in W$ e si scriva w come prodotto di riflessioni semplici (non necessariamente un'espressione ridotta), con t fattori. Si dimostri che t ha la stessa parità[1] di $\ell(w)$.

[1] Questa proprietà è una generalizzazione della proprietà usuale della parità di una permutazione.